

Über das asymptotische Verhalten von Lösungen
der linearen Differentialgleichung $M(Y) = \lambda N(Y)$
im Intervall $[0, \infty)$ bzw. $(-\infty, \infty)$ und die
Darstellung von Funktionen durch eine Klasse von
zugeordneten Integraltransformationen

INAUGURAL-DISSERTATION

zur Erlangung des Grades eines Doktors
der Naturwissenschaften

Vorgelegt dem Fachbereich Mathematik
der Philipps-Universität Marburg/Lahn

von

Gerhard Freiling
aus Wollmar

Marburg/Lahn 1975

Über das asymptotische Verhalten von Lösungen
der linearen Differentialgleichung $M(Y) = \lambda N(Y)$
im Intervall $[0, \infty)$ bzw. $(-\infty, \infty)$ und die
Darstellung von Funktionen durch eine Klasse von
zugeordneten Integraltransformationen

INAUGURAL-DISSERTATION

zur Erlangung des Grades eines Doktors
der Naturwissenschaften

Vorgelegt dem Fachbereich Mathematik
der Philipps-Universität Marburg/Lahn

von

Gerhard Freiling
aus Wollmar

Marburg/Lahn 1975



Vom Fachbereich Mathematik der

Philipps-Universität Marburg/Lahn als

Dissertation angenommen am: 23. 5. 1975.

Tag der mündlichen Prüfung: 6. 6. 1975

Berichterstatter: Prof. Dr. Eberhard

Mitberichterstatter: Prof. Dr. Avakumović

INHALTSVERZEICHNIS

§1 Einleitung	1
§2 Das asymptotische Verhalten von Lösungen der Differentialgleichung $l(y)=\lambda y$	7
§3 Abschätzung eines Fundamentalsystems der Differentialgleichung $n(y)=0$	9
§4 Abschätzung eines Fundamentalsystems der Differentialgleichung $m(y)=\lambda n(y)$	17
§5 Abschätzung der Green'schen Funktion	61
§6 Entwicklungssätze	77
§7 Hilfssätze	96
Literaturverzeichnis	102

§1 EINLEITUNG

Für ein kompaktes Intervall $[a,b]$ gibt es eine ganze Reihe von Arbeiten über Rand- und Eigenwertprobleme vom Typ

$$My = \lambda Ny \quad (1)$$

mit linearen Differentialoperatoren M und N , die von gewöhnlichen Differentialausdrücken und Randbedingungen in den Punkten a und b erzeugt werden.

Schärfke und Schneider [20] gelangen im Falle eines kompakten Intervalls durch eine Verallgemeinerung der Selbstadjungiertheit, wofür sie den Begriff "S-hermitesch" eingeführt haben, zu einer einheitlichen und umfassenden Theorie. Sie zeigen, daß sich die verschiedenartigen Untersuchungen von Bliss [3], Reid [9], Hölder [9], Stiefel [22], Lehmann [14] und Zimmerberg [27] sowie die "klassischen" Eigenwertprobleme vom Typ (1), wie sie im selbstadjungierten Fall von Kamke [11] und Collatz [5] behandelt worden sind, sämtlich in den S-hermiteschen Fall einordnen lassen. Allerdings ist die Voraussetzung: (1) ist S-hermitesch, so einschränkend, daß damit nur Probleme mit reellen-Eigenwerten erfaßt werden.

In der Theorie der i. a. nicht-S-hermiteschen Differentialoperatoren erhält man insbesondere für die Klasse der "regulären" Differentialoperatoren, die von Birkhoff [2], Tamarkine [24], Stone [23a] u. a. entwickelt worden ist und von Eberhard und dem Verfasser [7] auf die allgemeineren "N-regulären" Eigenwertprobleme vom Typ (1) übertragen wurde, umfangreiche Ergebnisse. So lassen sich die Eigenwerte wie auch die Eigenfunktionen asymptotisch abschätzen. Neben den gewöhnlichen Entwicklungssätzen mit Aussagen über die gleichmäßige Konvergenz in $[a,b]$ existieren Sätze über die lokalen Konvergenz- und Summierbarkeitseigenschaften der betreffenden verallgemeinerten Fourierentwicklungen, die bis zu der Aussage reichen, daß sich diese Entwicklungen äquikonvergent mit den gewöhnlichen Fourierreihen verhalten.

Eberhard [6a, b] zeigte, daß sich Birkhoffsche Rand- und Eigenwertprobleme mit irregulären Randbedin-

gungen wesentlich von denen mit regulären Randbedingungen unterscheiden.

Weyl [26] betrachtete als erster die Entwicklung willkürlicher Funktionen nach den Eigenfunktionen singulärer Rand- und Eigenwertprobleme, die von einem selbstadjungierten, linearen Differentialausdruck zweiter Ordnung und Randbedingungen der Gestalt

$$y'(0) - \theta y(0) = 0, \quad \theta \in \mathbb{R} \quad (2)$$

in $L(0, \infty)$ erzeugt werden.

Einen Überblick über die Ergebnisse, die von Weyl und in der Folgezeit von verschiedenen weiteren Autoren für Probleme von obiger Art erzielt wurden, findet man bei Titchmarsh [25].

Neumark [16c] behandelt singuläre Differentialoperatoren L , die von einem nichtselbstadjungierten Differentialausdruck zweiter Ordnung und Randbedingungen der Gestalt (2) mit $\theta \in \mathbb{C}$ in $L(0, \infty)$ erzeugt werden. Er zeigt, daß jede Funktion aus dem Definitionsbereich von L_0 eine gleichmäßig konvergente Integraldarstellung besitzt.

Weitere Untersuchungen über singuläre Probleme zweiter Ordnung findet man bei Kemp [12a], der einen lokalen Entwicklungssatz für Funktionen aus $L_p(-\infty, \infty)$ ($p \geq 1$) beweist und bei Ljance [15], der Rand- und Eigenwertprobleme mit Spektralsingularitäten studiert.

Die von Neumark [16c] entwickelten Methoden wurden von Funtakov [3] auf Probleme übertragen, die von Differentialgleichungen $2n$ -ter Ordnung erzeugt werden.

In einer weiteren Arbeit untersucht Kemp [12b] das Spektrum von Differentialoperatoren L , die von Differentialausdrücken der Gestalt

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \sum_{v=2}^n (a_v + b_v(x)) y^{(n-v)} \quad (3)$$

erzeugt werden. Unter der Voraussetzung $(x^2 + 1)^r b_v(x) \in L(-\infty, \infty)$ beweist er einen punktweisen Entwicklungssatz für Funktionen aus dem Definitionsbereich des Operators L ,

dabei ist r das Maximum der Vielfachheiten der Wurzeln q_i der Gleichung $\sum_{i=1}^{n-1} a_i (n-i) q_i^{n-i-1} = 0$.

Huige [10] entwickelte Formeln für das Spektralmaß von Operatoren, die von Differentialausdrücken der Gestalt (3) mit gerader Ordnung erzeugt werden, für den Fall, daß das Spektralmaß in einer beschränkten Umgebung des Nullpunktes nicht mehr beschränkt ist.

Mit Hilfe einer asymptotischen Abschätzung für ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung (3) mit $a_1 = 0$ und summierbaren Koeffizientenfunktionen $b_\nu(x)$ beweist Benzing [1]:

Wenn mit L der von (3) in $L(-\infty, \infty)$ erzeugte Differentialoperator und mit $G(x, f, \xi^n)$ die Greensche Funktion des Operators $L - \xi^n$ bezeichnet wird, dann gilt für jedes $f \in L(-\infty, \infty)$ mit kompaktem Träger $[a, b]$ gleichmäßig bzgl. $x \in [a, b]$

$$\frac{1}{2\pi i} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi f(\xi) \int_{C_R} n \xi^{n-1} G(x, f, \xi^n) d\xi$$

$$-\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin R(x-f)}{\pi(x-f)} f(\xi) d\xi = 0,$$

dabei ist C_R ein Kreisbogenabschnitt in der ξ -Ebene mit $|\xi| = R$ und $\alpha \leq \arg \xi \leq \alpha + \frac{2\pi}{n}$ für $\xi \in C_R$.

Die von Weyl für singuläre Differentialoperatoren zweiter Ordnung entwickelten Methoden wurden von Kodaira [13] auf singuläre Operatoren der Gestalt (1) übertragen, wobei M und N von selbstadjungierten Differentialausdrücken erzeugt werden.

Unter der zusätzlichen Voraussetzung, daß N ein positiver Operator ist, beweist Brauer [4] einen Entwicklungssatz für Funktionen aus einem Teilraum von $L_2(I)$, dabei bedeutet I ein nicht notwendigerweise beschränktes Intervall.

Die von Weyl, Kodaira und Brauer untersuchten

singulären Probleme lassen sich, wie Schneider [21] zeigt, in den allgemeineren reellen S-hermiteschen Fall einordnen.

Niessen [17] überträgt die von Schneider für reelle S-hermitesche Probleme erzielten Ergebnisse auf S-hermitesche Probleme, die von Differentialgleichungssystemen mit komplexwertigen Koeffizientenmatrizen und komplexen λ -linearen Randbedingungen erzeugt werden. Er erhält einen lokalen Entwicklungssatz und in einer weiteren gemeinsamen Arbeit mit Schneider [18] einen Entwicklungssatz bzgl. der Norm.

Nicht-S-hermitesche singuläre Rand- und Eigenwertprobleme vom Typ (1) wurden bisher noch nicht untersucht.

In der vorliegenden Arbeit werden nichtselbstadjungierte Differentialausdrücke der Gestalt

$$m(y) = \lambda n(y) \quad (4)$$

mit

$$m(y) = y^{(n)} + f_2(x)y^{(n-2)} + \dots + f_n(x)y$$

und

$$n(y) = y^{(p)} + g_2(x)y^{(p-2)} + \dots + g_p(x)y$$

in den Intervallen $I_1 = [0, \infty)$ bzw. $I_2 = (-\infty, \infty)$ mit $0 \leq p < n$ betrachtet.

Unter geeigneten Differenzierbarkeits- und Integrierbarkeitsvoraussetzungen an die Koeffizientenfunktionen $f_k(x)$ bzw. $g_k(x)$ gelingt es, durch Modifizierung der in [7] entwickelten Methoden für jedes der Intervalle I_1 bzw. I_2 ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung (4) asymptotisch abzuschätzen. Die Abschätzungen entsprechen im Fall $n=2, p=0$ denen von Stone [23b] bzw. Neumark [16c], im Fall $n=1, p=0$ denen von Funtakov [8] bzw. Benzinger [1] und im Fall eines kompakten Intervalls denen in [7a].

Im zweiten Teil dieser Arbeit wird eine Folge von N-regulären Rand- und Eigenwertproblemen vom Typ $M_{\lambda} y = \lambda N_{\lambda} y$ mit Differentialoperatoren, die von gewöhnlichen Differentialausdrücken m und n der Gestalt (4) und N-regulären Randbedingungen

$$U_j^k(y)=0; 1 \leq j \leq n; k=1, 2, 3, \dots \quad (5)$$

mit

$$U_j^k(y) = U_{j0}(y) + U_{ja_k}(y) \text{ bzw. } U_{j-a_k}(y) + U_{ja_k}(y) \quad (6), (7)$$

erzeugt werden, betrachtet. Die Randbedingungen seien o.B.d.A. in der normierten Form gegeben, d.h. für $c=0$ bzw. $c=-a_k$ sei

$$U_{vc}(y) = a_v y^{(k_v)}(c) + \sum_{j=\gamma_v}^{k_v-1} a_{vj} y^{(j)}(c)$$

und

$$U_{va_k}(y) = b_v y^{(k_v)}(a_k) + \sum_{j=\eta_v}^{k_v-1} b_{vj} y^{(j)}(a_k)$$

mit $n-1 \geq k_1 \geq \dots \geq k_n; k_{v+2} > k_v; |a_v|^2 + |b_v|^2 > 0; |a_v \gamma_v| > 0$ und $|b_v \eta_v| > 0$.

Für Probleme der Gestalt (5), (6) sei $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ eine Permutation der Zahlen $1, 2, \dots, n$, so daß für die Randbedingungen (6) folgendes gelte:

(i) entweder sei $\eta_{\alpha_i} \geq p-1$ für $1 \leq i \leq n$, dann setzen wir $k_M = k_{n-p+1}$,

(ii) oder es ist $\eta_{\alpha_1} \leq \dots \leq \eta_{\alpha_{p-1}} < p-1 \leq \eta_{\alpha_p} \leq \dots \leq \eta_{\alpha_n}$, in diesem

Fall sei $l := \max_{1 \leq j \leq p} \{j | p-j-\eta_{\alpha_j} > 0\}$, $I_1 := \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$, $I_2 := \{\beta_1, \dots$

$\dots, \beta_{p-l}\}$ mit $I_1 \cap I_2 = \emptyset$ und $k_v \leq k_j$ für $v \in I_2, j \in \{1, \dots, n\} - (I_1 \cup I_2)$,

und wir setzen $k_M = \max_{j \in I_1 \cup I_2} k_j$.

Durch Abwandlung eines zuerst von Stone [23b] für den Fall $n=2, p=0$ entwickelten Ausschöpfungsverfahrens erhalten wir für Probleme der Gestalt (4), (6) unter einer über die N -Regularität hinausgehenden Voraussetzung (siehe §5) die folgenden Ergebnisse:

Sei $\lambda = \varrho^{n-p}$, $\gamma_0^R = \{\varrho \in \mathbb{C} \mid |\varrho| = R, 0 \leq \arg \varrho \leq \frac{2\pi}{n-p}\}$, $G_{a_k}(x, \vartheta, \varrho)$ die Greensche Funktion eines Problems der Gestalt (4), (6) und $n^*(y)$ der zu $n(y)$ adjungierte Differentialausdruck, dann existiert unter geeigneten Bedingungen an die Koeffizientenfunktionen von $m(y)$ und $n(y)$ für genügend großes R eine Folge reeller Zahlen a_k mit $\lim a_k = \infty$ und eine Funktion $\psi(x, \vartheta, \varrho)$, so daß für $-A \leq x \leq A$ und $-\infty < \vartheta < \infty$ gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\gamma_0^R} (n-p) \varrho^{n-p-1} n^*(G_{a_k}(x, \vartheta, \varrho) - \psi(x, \vartheta, \varrho)) d\varrho = 0.$$

Die Funktionen $\varphi(x, \xi, \rho)$ liefern uns eine Klasse von Integraltransformationen mit den Eigenschaften:

a) Sei $f(x) \in C^{k_{M+1}}(0, \omega)$, $f^{(j)}(x) \in L(0, \omega)$ für $0 \leq j \leq k_{M+1}$ und $f^{(j)}(0) = 0$ für $0 \leq j \leq k_M$, dann gilt gleichmäßig in jedem Intervall $[\delta_1, A] \subset (0, \omega)$

$$f(x) = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{n-p}{2\pi i} (-1)^{p-1} \int_0^\infty \int_{\delta_0^R} n_\xi^*(\varphi(x, \xi, \rho)) f(\xi) \rho^{n-p-1} d\rho d\xi.$$

b) Sei $f(x) \in L(0, \omega)$, $f(x) = 0$ für $x \in [0, \vartheta]$, $\vartheta > 0$. Falls $k_M = 0$ ist, gilt gleichmäßig für $0 \leq x \leq A$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty \int_{\delta_0^R} n_\xi^*(\varphi(x, \xi, \rho)) f(\xi) (n-p) \rho^{n-p-1} d\rho d\xi - (-1)^{p-1} \int_0^\infty \frac{\sin R(x-\xi)}{\pi(x-\xi)} f(\xi) d\xi \right\} = 0.$$

Damit ist gezeigt, daß unter den Voraussetzungen von b) die Darstellung einer Funktion nach der obigen Klasse von Integraltransformationen äquivalent ist mit der Darstellbarkeit als Fourierintegral.

Es ist zu bemerken, daß bei dem Äquikonvergenzsatz b) die Bedingung $k_M = 0$ aufgrund der Normierung der Randbedingungen nur für $0 \leq p \leq 2$ erfüllt sein kann, d.h. wenn $n(y)$ höchstens die Ordnung zwei besitzt.

Im Falle von Problemen der Gestalt (4), (7) erhalten wir die analogen Ergebnisse.

§ 2 Das asymptotische Verhalten von Lösungen der Differentialgleichung $l(y) = \lambda y$

Für beliebiges $\lambda \in \mathbb{C}$ betrachten wir in $C^n(0, \infty)$ bzw. in $C^n(-\infty, \infty)$ die Differentialgleichung

$$l(y) = \lambda y \quad (2.1)$$

mit

$$l(y) = y^{(n)} + \sum_{j=2}^n p_j(x) y^{(n-j)}$$

und $p_j(x) \in L(0, \infty)$ bzw. $L(-\infty, \infty)$ für $2 \leq j \leq n$.

In diesem Paragraphen setzen wir $\lambda = \varrho^n$ und betrachten in der komplexen Zahlenebene die Sektoren

$$\tilde{S}_{\alpha k} = \left\{ \varrho \in \mathbb{C} \mid \alpha + \frac{k\pi}{n} \leq \arg \varrho < \alpha + \frac{(k+1)\pi}{n} \right\}$$

Mit $\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2, \dots, \tilde{\omega}_n$ bezeichnen wir die verschiedenen n -ten Einheitswurzeln in einer Anordnung, die den späteren Bedürfnissen noch angepaßt werden soll.

Lemma 2.1 (Siehe [16a], S. 38)

Für jeden der Sektoren $\tilde{S}_{0k}$ kann die Anordnung der Zahlen $\tilde{\omega}_1, \dots, \tilde{\omega}_n$ so gewählt werden, daß für alle $\varrho \in \tilde{S}_{0k}$ die Ungleichungen

$$\Re(\varrho \tilde{\omega}_1) \leq \Re(\varrho \tilde{\omega}_2) \leq \dots \leq \Re(\varrho \tilde{\omega}_n)$$

gelten.

Mit den obigen Bezeichnungen gilt:

Satz 2.1 Die Gleichung (2.1) besitzt in jedem Bereich

$\tilde{S}_{0k}$ der komplexen ϱ -Ebene und für $x \in [0, \infty)$ bzw. $x \in (-\infty, \infty)$ n linear unabhängige Lösungen $y_1(x, \varrho), y_2(x, \varrho), \dots, y_n(x, \varrho)$, die für $\varrho \in \tilde{S}_{0k}$ und hinreichend großes $|\varrho|$ regulär sind.

Es gilt für $|g| \rightarrow \infty$ gleichmäßig bzgl. $g \in \tilde{S}_{0k}$ und $x \in [0, \infty)$ bzw. $x \in (-\infty, \infty)$ für $1 \leq k \leq n$ und $0 \leq j \leq n-1$

$$y_k^{(j)}(x, g) = (g \tilde{\omega}_k)^j e^{g \tilde{\omega}_k x} [1 + o(\frac{1}{g})]. \quad (2.2)$$

Ferner gilt für $x \rightarrow +\infty$ und $g \in \tilde{S}_{0k}$, $|g| > |g_0|$, $\arg g \neq \frac{k\pi}{n}$

$$y_k^{(j)}(x, g) = (g \tilde{\omega}_k)^j e^{g \tilde{\omega}_k x} [1 + o(1)] \quad (2.3)$$

und für $x \rightarrow -\infty$ gleichmäßig bzgl. $g \in \tilde{S}_{0k}$, $|g| > |g_0|$

$$y_k^{(j)}(x, g) = (g \tilde{\omega}_k)^j e^{g \tilde{\omega}_k x} m_{jk}(x, g),$$

dabei sind $m_{jk}(x, g)$ Funktionen, die für alle x und g gleichmäßig beschränkt sind.

Dieser Satz läßt sich beweisen, indem man die von Birkhoff [2] für den kompakten Fall entwickelte Methode in geeigneter Weise modifiziert. Den Beweis für Satz 2.1 im Fall $I = (-\infty, \infty)$ bzw. $I = [0, \infty)$ findet man bei Benzinger [1] bzw. bei Funtakov [8b].

Bemerkung 2.1 Man kann die Voraussetzungen von Satz 2.1 etwas einschränken, indem man nur verlangt, daß für die betrachteten Funktionen $y(x, g)$ gilt:

$y(x, g) \in C^{n-1}(I)$ und $y^{(n-1)}(x, g)$ ist in jedem kompakten Teilintervall von I absolut stetig.

Bemerkung 2.2 Ersetzt man $l(y)$ durch $l_1(y) = l(y) + \sum_{j=2}^n c_j y^{(n-j)}$, (c_j konstant), so läßt sich analog zu Satz 2.1 zeigen, daß sich die Lösungen der Differentialgleichung $l_1(y) = \lambda y$ asymptotisch so verhalten, wie die Lösungen der Differentialgleichung $l_1(y) - l(y) = \lambda y$. (Siehe [1]).

§ 3 Abschätzung eines Fundamentalsystems der

Differentialgleichung $n(y)=0$

Für $p \geq 1$ und $k \geq 0$ betrachten wir im Raum $C^{p+k}(-\infty, \infty)$ die Differentialgleichung

$$n(y) = (n_0 - n_1)(y) = 0 \quad (3.1)$$

mit

$$n_0(y) = y^{(p)} \quad (3.2)$$

und

$$n_1(y) = \sum_{\nu=1}^p s_\nu(x) y^{(p-\nu)} \quad (3.3)$$

Die Koeffizientenfunktionen $s_\nu(x)$ sollen folgenden Bedingungen genügen

$$s_\nu(x) \in C^k(-\infty, \infty) \quad 1 \leq \nu \leq p \quad (3.4)$$

$$x^{p-1+\nu-1} s_\nu(x) \in L(-\infty, \infty) \quad 1 \leq \nu \leq p \quad (3.5)$$

und

$$x^{\nu+j} s_\nu^{(j)}(x) \rightarrow 0 \text{ für } |x| \rightarrow \infty, 1 \leq \nu \leq p; 0 \leq j \leq k. \quad (3.6)$$

Die Funktionen

$$\{\tilde{y}_1(x), \dots, \tilde{y}_p(x)\} \text{ mit } \tilde{y}_j(x) = x^{j-1} \quad (3.7)$$

bilden bekanntlich ein Fundamentalsystem von Lösungen der Differentialgleichung (3.2).

Wenn wir mit w die Wronskideterminante der Funktionen (3.7) und mit $w_\nu(x)$ die Adjunkte der Funktionen $\tilde{y}_\nu^{(p-1)}(x)$ in der zu w gehörenden Matrix bezeichnen, dann gilt mit $\gamma_\nu \in \mathbb{R}$

$$w_\nu(x) = \gamma_\nu x^{p-\nu}. \quad (3.8)$$

Mit diesen Bezeichnungen erhalten wir:

Satz 3.1 Unter den Voraussetzungen (3.4), (3.5) und (3.6) existiert in $C^{p+k}(-\infty, \infty)$ ein Fundamentalsystem $\{y_1(x), y_2(x), \dots, y_p(x)\}$ der Dgl. (3.1), welches folgenden Abschätzungen genügt:

Für $1 \leq m \leq p$ und $k \geq 0$ gilt

$$y_m^{(j)}(x) = x^{m-j-1} \binom{m-1}{j} j! \{1+o(1)\} \quad \text{für } \begin{matrix} x \rightarrow \infty \\ 0 \leq j \leq m-1 \end{matrix} \quad (3.9)$$

$$y_m^{(j)}(x) = o(x^{m-j-1}) \quad \text{für } \begin{matrix} x \rightarrow \infty \\ m \leq j \leq p+k \end{matrix} \quad (3.10)$$

$$y_m^{(j)}(x) = O(x^{p-1-j}) \quad \text{für } \begin{matrix} x \rightarrow -\infty \\ 0 \leq j \leq p+k \end{matrix} \quad (3.11)$$

Beweis zu Satz 3.1

Zum Beweis der Behauptungen (3.9), ..., (3.11) verwenden wir die Methode der sukzessiven Approximationen. Wir setzen unter Verwendung des Fundamentalsystems (3.7) für $1 \leq r \leq p$ und $0 \leq j \leq p-1$

$$y_{r,0}^{(j)}(x) = \tilde{y}_r^{(j)}(x) \quad (3.12)$$

$$y_{r,m+1}^{(j)}(x) = \tilde{y}_r^{(j)}(x) - \sum_{\nu=1}^p \tilde{y}_\nu^{(j)}(x) \int_x^\infty \frac{w_\nu(t)}{w} n_1(y_{r,m}(t)) dt$$

$m=0, 1, 2, \dots$

Wir zeigen nun durch vollständige Induktion bzgl. m , daß die Funktionen $y_{r,m}^{(j)}(x)$ für $1 \leq r \leq p$, $0 \leq j \leq p+k$ und $m \geq 0$ die Abschätzungen (3.9), ..., (3.11) erfüllen.

Sei $1 \leq r \leq p$ und $0 \leq j \leq p+k$, dann gilt

(i) Für $m=0$ ist $y_r^{(j)}(x) = \tilde{y}_r^{(j)}(x)$ und erfüllt somit (3.9), ..., (3.11).

(ii) Wir setzen nun voraus, daß die Funktionen $y_{r,m}^{(j)}(x)$ die Abschätzungen (3.9), ..., (3.11) erfüllen und zeigen, daß dann auch die Funktionen $y_{r,m+1}^{(j)}(x)$ diese Abschätzungen erfüllen.

Aus der Induktionsvoraussetzung erhalten wir mit $K_{\nu r j} \in \mathbb{R}$ und der Abkürzung

$$\tilde{n}_1(y_{r,m}(t)) := \sum_{\nu=1}^p |s_\nu(t)| |y_{r,m}^{(p-\nu)}(t)|$$

für $0 \leq j \leq r-1$ und $1 \leq v \leq p$

$$\begin{aligned}
 & \left| \int_x^\infty \frac{\tilde{y}_v^{(j)}(x)}{\tilde{y}_r^{(j)}(x)} \frac{w_v(t)}{w} n_1(y_{r,m}(t)) dt \right| \\
 & \leq K_{vrj} \int_x^\infty x^{v-r} t^{p-v} \tilde{n}_1(y_{r,m}(t)) dt \\
 & \leq K_{vrj} \int_x^\infty t^{p-r} \tilde{n}_1(y_{r,m}(t)) dt \quad (3.13) \\
 & = \xi \quad \text{für } x=x_0(t),
 \end{aligned}$$

da $t^{p-r} \tilde{n}_1(y_{r,m}(t))$ wegen Voraussetzung (3.5) aufgrund der Induktionsvoraussetzung in $L(-\infty, \infty)$ liegt.

Aus (3.13) folgt durch vollständige Induktion, daß die Funktionen $y_{r,m}^{(j)}(x)$ für $1 \leq r \leq p, 0 \leq j \leq p-1$ und alle $m \geq 0$ (3.9), ..., (3.11) erfüllen.

Wegen $y_k^{(j)}(x) = 0$ für $k \leq j$ gilt für $1 \leq r \leq p; r \leq j \leq p-1$ und $m \geq 0$

$$y_{r,m+1}^{(j)}(x) = - \sum_{v=j+1}^p \tilde{y}_v^{(j)}(x) \int_x^\infty \frac{w_v(t)}{w} n_1(y_{r,m}(t)) dt \quad (3.14)$$

Daraus folgt mit Voraussetzung (3.5) analog wie oben durch vollständige Induktion die Gültigkeit von (3.9), ..., (3.11) für $1 \leq r \leq p; r \leq j \leq p-1$ und $m \geq 0$.

$$\text{Wegen } \sum_{v=1}^p \tilde{y}_v^{(j)}(x) \frac{w_v(x)}{w} = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \leq j \leq p-2 \\ 1 & \text{für } j = p-1 \end{cases}$$

folgt aus (3.12)

$$y_{r,m}^{(p+i)}(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^i n_1(y_{r,m}(x)). \quad (3.15)$$

Aus Voraussetzung (3.6) folgt analog wie oben durch vollständige Induktion, daß die Funktionen $y_{r,m}^{(j)}(x)$ für $1 \leq r \leq p$; $p \leq j \leq p+k$ und $m \geq 0$ (3.10) und (3.11) erfüllen.

Nun zeigen wir, daß die Reihen

$$\frac{y_r^{(j)}(x)}{\tilde{y}_r^{(j)}(x)} := \frac{1}{\tilde{y}_r^{(j)}(x)} \left\{ y_{r,0}^{(j)}(x) + \sum_{v=1}^{\infty} (y_{r,v}^{(j)}(x) - y_{r,v-1}^{(j)}(x)) \right\} \quad (3.16)$$

für $0 \leq j \leq r-2$; $1 \leq r \leq p$

bzw. die Reihen

$$y_r^{(j)}(x) := y_{r,0}^{(j)}(x) + \sum_{v=1}^{\infty} (y_{r,v}^{(j)}(x) - y_{r,v-1}^{(j)}(x)) \quad (3.17)$$

für $r-1 \leq j \leq r+k$; $1 \leq r \leq p$

für ein genügend großes $a_0 > 0$ im Intervall $[a_0, \infty)$ gleichmäßig konvergieren.

Dazu setzen wir für $1 \leq r \leq p$ und $m \geq 1$

$$M_{mrj}(a) = \sup_{x \geq a} \left| \frac{1}{\tilde{y}_r^{(j)}(x)} (y_{r,m}^{(j)}(x) - y_{r,m-1}^{(j)}(x)) \right|$$

falls $0 \leq j \leq r-1$

bzw.

$$M_{mrj}(a) = \sup_{x \geq a} |y_{r,m}^{(j)}(x) - y_{r,m-1}^{(j)}(x)|$$

falls $r \leq j \leq r+k$.

Die obigen Suprema existieren aufgrund der Abschätzungen

für die Funktionen $y_{r,m}^{(j)}(x)$.

Ferner sei

$$c_1(a) = \max_{1 \leq l \leq p} \int_a^\infty t^{p-1+l-1} |s_1(t)| dt$$

Mit diesen Abkürzungen folgt aus (3.12) für $1 \leq r \leq p$ und $0 \leq j \leq r-1$

$$\begin{aligned} M_{m+1,r,j}(a) &= \sup_{x \geq a} \left| \sum_{v=1}^p \frac{\tilde{y}_v^{(j)}(x)}{\tilde{y}_r^{(j)}(x)} \int_x^\infty \frac{w_v(t)}{w} n_1(y_{r,m} - y_{r,m-1}) dt \right| \\ &\leq \sum_{v=1}^p \sup_{x \geq a} \left| \int_x^\infty \frac{\tilde{y}_v^{(j)}(x)}{\tilde{y}_r^{(j)}(x)} \frac{w_v(t)}{w} n_1(y_{r,m} - y_{r,m-1}) dt \right| \quad (3.18) \\ &\leq \sum_{v=1}^{r-1} \sup_{x \geq a} \left| \frac{\tilde{y}_v^{(j)}(x)}{\tilde{y}_r^{(j)}(x)} \right| \sup_{x \geq a} \int_x^\infty \left| \frac{w_v(t)}{w} \right| \tilde{n}_1(y_{r,m} - y_{r,m-1}) dt \\ &\quad + \sum_{v=r}^p \sup_{x \geq a} \int_x^\infty \left| \frac{\tilde{y}_v^{(j)}(t)}{\tilde{y}_r^{(j)}(t)} \right| \left| \frac{w_v(t)}{w} \right| \tilde{n}_1(y_{r,m} - y_{r,m-1}) dt \\ &= \sum_{v=1}^{r-1} \int_a^\infty \left| \frac{w_v(t)}{w} \right| \left| \sum_{k=1}^{r-\tau} |s_1(t)| |y_{r,m}^{(p-1)}(t) - y_{r,m-1}^{(p-1)}(t)| dt \right. \\ &\quad \left. + \sum_{v=r}^{r-1} \int_a^\infty \left| \frac{w_v(t)}{w} \right| \left| \sum_{l=p-r+1}^p |s_1(t)| \left| \frac{\tilde{y}_r^{(p-1)}(t)}{\tilde{y}_r^{(p-1)}(t)} \right| |y_{r,m}^{(p-1)}(t) - y_{r,m-1}^{(p-1)}(t)| dt \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sum_{j=r}^p \int_a^\infty \left| \frac{\tilde{y}_v^{(j)}(t)}{\tilde{y}_r^{(j)}(t)} \right| \left| \frac{w_v(t)}{w} \right| \left| \sum_{k=1}^{p-r} |s_1(t)| |y_{r,m}^{(p-1)}(t) - y_{r,m-1}^{(p-1)}(t)| dt \right. \right. \end{aligned}$$

$$+ \sum_{v=\tau}^p \int_a^{\infty} \left| \frac{\tilde{y}_v^{(j)}(t)}{\tilde{y}_r^{(j)}(t)} \right| \frac{w_v(t)}{w} \left| \sum_{l=p-r+1}^p |s_l(t)| \left| \frac{\tilde{y}_r^{(p-1)}(t)}{\tilde{y}_r^{(p-1)}(t)} \right| |y_{r,m}^{(p-1)} - y_{r,m-1}^{(p-1)}| \right|$$

$$= L_{mrj} c_1(a) \sum_{\ell=0}^{p-1} M_{mrl}(a)$$

$$< \delta \sum_{\ell=0}^{p-1} M_{mrl}(a)$$

mit $L_{mrj} \in \mathbb{R}$ und $0 < \delta < 1/(p+k+1)$ falls $a > a_0$.

Ganz analog zu (3.18) zeigt man, daß für $1 \leq r \leq p$ und $r \leq j \leq p-1$

$$M_{m+1,r,j}(a) \leq \delta \sum_{\ell=0}^{p-1} M_{m,r,l}(a) \quad (3.19)$$

mit $0 < \delta < 1/(p+k+1)$ erfüllt ist, falls $a > a_0$ ist.

Aus (3.15) folgt mit Voraussetzung (3.6) und den Abschätzungen für die Funktionen $y_{r,m}^{(j)}(x)$

$$M_{m+1,r,j}(a) \leq \delta \sum_{\ell=0}^{j-1} M_{m,r,l}(a). \quad (3.20)$$

$$1 \leq r \leq p; p \leq j \leq p+k$$

Durch Addition der Ungleichungen (3.18), ..., (3.20) erhalten wir

$$M_{m+1,r,l}(a) \leq \delta (p+k+1) \sum_{\ell=0}^{p+k-1} M_{m,r,l}(a) \quad (3.21)$$

$$< \delta_0 \sum_{\ell=0}^{p+k-1} M_{m,r,l}(a) \quad \text{mit } \delta_0 < 1$$

und daraus folgt

$$M_{m+1,r,1}(a) < \delta_0^m \sum_{v=0}^{p+k-1} M_{0,r,v}(a) \quad (3.22)$$

für $0 \leq l \leq p+k, 1 \leq r \leq p$.

Daher konvergieren die Reihen (3.16) bzw. (3.17) in jedem Intervall $[a, \infty)$ mit $a > a_0$ gleichmäßig.

Für die Wronskideterminante W der Funktionen $y_1(x), \dots, y_p(x)$ gilt

$$W = \begin{vmatrix} y_1(x) & \dots & y_p(x) \\ y_1'(x) & \dots & y_p'(x) \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(p-1)}(x) & \dots & y_p^{(p-1)}(x) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & x & \dots & x^{p-1} \\ o(\frac{1}{x}) & 1 & \dots & (p-1)x^{p-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ o(\frac{1}{x^{p-1}}) & o(\frac{1}{x^{p-2}}) & \dots & (p-1)! \end{vmatrix} \quad (1+o(1))$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & x & \dots & x^{p-1} \\ 0 & 1 & \dots & (p-1)x^{p-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & (p-1)! \end{vmatrix} \quad (1+o(1)) \neq 0 \quad \text{für } x > a_0,$$

daher sind diese Funktionen linear unabhängig und bilden im Intervall $[a_0, \infty)$ ein Fundamentalsystem der Dgl. (3.1) mit den Eigenschaften (3.9) und (3.10).

Da wir ganz analog zu dem obigen Beweis für das Intervall $(-\infty, -a_0]$ ein Fundamentalsystem $\{z_1(x), \dots, z_p(x)\}$ konstruieren können, das sich für $x \rightarrow -\infty$ analog verhält, wie das Fundamentalsystem $\{y_1(x), \dots, y_p(x)\}$ für $x \rightarrow \infty$, lassen sich die Funktionen $y_1(x), \dots, y_p(x)$ in das ganze Intervall $(-\infty, x)$ so fortsetzen, daß (3.11) erfüllt ist und zwar so, daß für alle $x \in (-\infty, \infty)$ $|W| \geq c > 0$ ist.

Damit ist die Existenz eines Fundamentalsystems nachgewiesen, das die Abschätzungen von Satz 3.1 erfüllt.

Ganz analog zu Satz 3.1 zeigt man:

Satz 3.2 Unter den Voraussetzungen

$$s_\nu(x) \in C^k(0, \infty) \quad 1 \leq \nu \leq p$$

$$x^{2(p-1)} s_\nu(x) \in L(0, \infty) \quad 1 \leq \nu \leq p$$

und

$$x^{\nu+j} s_\nu^{(j)}(x) \rightarrow 0 \quad \text{für } x \rightarrow \infty \text{ und } 1 \leq \nu \leq p; 0 \leq j \leq k$$

existiert im Intervall $[0, \infty)$ ein Fundamentalsystem der Dgl. (3.1), welches den Abschätzungen (3.9) und (3.10) genügt.

§ 4 Abschätzung eines Fundamentalsystems der

Differentialgleichung $m(y) = \lambda n(y)$

Mit Hilfe der Abschätzungen aus den Paragraphen zwei und drei werden wir nun in den Intervallen $I = (-\infty, \infty)$ bzw. $I = [0, \infty)$ ein Fundamentalsystem der Dgl.

$$(4.1) \quad m(y) = \lambda n(y)$$

abschätzen. Dabei sei

$$(4.2) \quad m(y) = y^{(n)} + \sum_{v=2}^n f_v(x) y^{(n-v)}$$

und

$$(4.3) \quad n(y) = y^{(p)} + \sum_{\mu=2}^p g_{\mu}(x) y^{(p-\mu)}$$

mit $0 \leq p < n$.

Von den Koeffizientenfunktionen fordern wir

$$(4.4) \quad \begin{aligned} f_v(x) &\in C^{a_v}(I) & 2 \leq v \leq n \\ g_{\mu}(x) &\in C^{b_{\mu}}(I) & 2 \leq \mu \leq p \end{aligned}$$

mit

$$(4.5) \quad \begin{aligned} a_v &= n - p - 1 + n - v & 2 \leq v \leq n \\ b_{\mu} &= 2(n - p) - 1 + n - \mu & 2 \leq \mu \leq p. \end{aligned}$$

Ferner soll gelten:

Die Funktionen

$$(4.6) \quad \left. \begin{aligned} x^{p-1} g_{\mu}^{(j+k)}(x) \\ x^{p-1} f_{\mu}^{(j+k)}(x) \end{aligned} \right\} \quad 2 \leq \mu + j \leq n - p; 0 \leq k \leq p - (\mu + j) + 1$$

$$(4.6) \quad \begin{aligned} x^{p-1+\nu-1} f_k^{(j)}(x) & \quad n-p+1 \leq k+j \leq n-p+\nu; 1 \leq \nu \leq p; 2 \leq k \leq n \\ x^{p-1+\nu-1} g_\mu^{(j)}(x) & \quad n-p+1 \leq \mu+j \leq n-p+\nu; 1 \leq \nu \leq p; 2 \leq \mu \leq p \end{aligned}$$

seien aus $L(I)$ und die Funktionen

$$(4.7) \quad \begin{aligned} x^{p-1} f_\nu^{(j)}(x) & \quad n-p+1 \leq \nu+j \leq 2n-p-1; 2 \leq \nu \leq n \\ x^{p-1} g_\mu^{(k)}(x) & \quad n-p+1 \leq \mu+k \leq n+2(n-p)-1; 2 \leq \mu \leq p \end{aligned}$$

streben zu Null für $|x| \rightarrow \infty$, falls $I = (-\infty, \infty)$, bzw. für $x \rightarrow \infty$, falls $I = [0, \infty)$.

Wir setzen in diesem Paragraphen $\lambda = \rho^{n-p}$ und betrachten in der komplexen Zahlenebene die Sektoren

$$S_{\alpha k} := \left\{ \rho \in \mathbb{C} \mid \alpha + \frac{k\pi}{n-p} \leq \arg \rho \leq \frac{(k+1)\pi}{n-p} \right\}$$

$$0 \leq k \leq 2n-1, 0 \leq \alpha < 2\pi.$$

Mit $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{n-p}$ bezeichnen wir die $(n-p)$ -ten Einheitswurzeln in einer Anordnung, die unseren späteren Bedürfnissen noch angepaßt werden soll. Für ein geeignetes α , das von $n-p$ abhängt, läßt sich für jeden der Sektoren $S_{\alpha k}$ die Anordnung der ω_i so wählen, daß für alle $\rho \in S_{\alpha k}$ die Ungleichungen

$$(4.8) \quad \Re(\rho \omega_1) \leq \Re(\rho \omega_2) \leq \dots \leq \Re(\rho \omega_k) \leq 0 \leq \Re(\rho \omega_{k+1}) \leq \dots \leq \Re(\rho \omega_{n-p})$$

gelten (siehe [16a], S.38).

Von nun an seien α und k so gewählt, daß (4.8) gilt.

Zuerst betrachten wir den Fall $I = (-\infty, \infty)$. Durch geeignete Abwandlung der zuerst in [7a] entwickelten Methode zur Abschätzung eines Fundamentalsystems einer Dgl. der Gestalt (4.1) erhalten wir die folgenden Abschätzungen:

Satz 4.1 Sei $\{h_1(x), \dots, h_p(x)\}$ ein Fundamentalsystem der Dgl. $n(y)=0$, welches die Abschätzungen von Satz 3.1 erfüllt, dann existiert unter den Voraussetzungen (4.4), ..., (4.8) in $(-\infty, \infty)$ für jeden Sektor $S_{\alpha k}$ ($k=0, 1, \dots, 2(n-p)-1$) ein Fundamentalsystem $\{y_1(x, \varrho), \dots, y_n(x, \varrho)\}$ der Dgl. (4.1), welches folgenden Abschätzungen genügt:

Für ein festes $c \in \mathbb{R}$ gilt gleichmäßig bzgl. $\varrho \in S_{\alpha k}$ mit $|\varrho| > |\varrho_0|$ und $x \in [c, \infty)$

$$y_r^{(k)}(x, \varrho) = h_r^{(k)}(x) + o\left(\frac{1}{\lambda}\right) \quad 1 \leq r \leq p; 0 \leq k \leq p$$

(4.9)

$$y_r^{(k)}(x, \varrho) = h_r^{(k)}(x) + o\left(\frac{1}{\varrho^{n-k}}\right) \quad 1 \leq r \leq p; p+1 \leq k \leq n-1.$$

Für $x \in (-\infty, c]$ gilt gleichmäßig bzgl. x und $\varrho \in S_{\alpha k}$,

$$y_r^{(k)}(x, \varrho) - h_r^{(k)}(x) = \sum_{\mu=1}^p h_{\mu}^{(k)}(x) \psi_{\mu r}(x, \varrho) + o\left(\frac{1}{\lambda}\right) \quad 0 \leq k \leq p$$

(4.10)

$$y_r^{(k)}(x, \varrho) - h_r^{(k)}(x) = \sum_{\mu=1}^p h_{\mu}^{(k)}(x) \psi_{\mu r}(x, \varrho) + o\left(\frac{1}{\varrho^{n-k}}\right) \quad p+1 \leq k \leq n-1$$

falls $1 \leq r \leq p$; dabei gilt gleichmäßig für $x \in (-\infty, c]$ und $\varrho \in S_{\alpha k}$,

$$\psi_{\mu r}(x, \varrho) = o\left(\frac{1}{\varrho^{n-p}}\right).$$

Für $x \in (-\infty, \infty)$ und $\varrho \in S_{\alpha k}$, $|\varrho| > |\varrho_0|$ gilt gleichmäßig bzgl. x und ϱ

$$(4.11) \quad y_r^{(k)}(x, \varrho) = (\varrho \omega_{r-p})^k e^{\int \omega_{r-p} dx} \left\{ 1 + o\left(\frac{1}{\varrho}\right) \right\} \quad p+1 \leq r \leq n; 0 \leq k \leq n-1.$$

Ferner gilt für $x \rightarrow \infty$ und jedes ϱ aus dem Inneren des Sektors $S_{\alpha k}$ mit $|\varrho| > |\varrho_0|$

$$(4.12) \quad y_r^{(k)}(x, \varrho) = h_r^{(k)}(x) + o(1) \quad 1 \leq r \leq p; 0 \leq k \leq n-1$$

und

$$(4.13) \quad y_r^{(k)}(x, \varrho) = (\varrho \omega_{r-p})^k e^{\varrho \omega_{r-p} x} (1 + o(1)) \quad p+1 \leq r \leq n; 0 \leq k \leq n-1.$$

Bemerkung: Die Abschätzungen (4.12) und (4.13) gelten für ein festes $\varepsilon > 0$ gleichmäßig bzgl. ϱ für alle ϱ mit $|\varrho| > |\varrho_0|$ und

$$\varrho \in S_{\alpha k, \varepsilon} := \left\{ \varrho \mid \alpha + \varepsilon + \frac{k\pi}{n-p} \leq \arg \varrho \leq \alpha + \frac{(k+1)\pi}{n-p} - \varepsilon \right\}.$$

Zuerst beweisen wir den folgenden Hilfssatz, der eine etwas schwächere Aussage macht als Satz 4.1, im Anschluß daran leiten wir Satz 4.1 aus diesem Hilfssatz her.

Lemma 4.1 Unter den Voraussetzungen von Satz 4.1 existiert in $(-\infty, \infty)$ ein Fundamentalsystem $\{y_1(x, \varrho), \dots, y_n(x, \varrho)\}$ der Dgl. (4.1), welches die Abschätzungen (4.9), (4.10), (4.12) und (4.13) erfüllt. Ferner gilt (statt (4.11)) gleichmäßig für $x \in (-\infty, \infty)$ und $\varrho \in S_{\alpha k}$,

$$(4.14) \quad y_r^{(k)}(x, \varrho) = (\varrho \omega_{r-p})^k e^{\varrho \omega_{r-p} x} \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{\varrho}\right) \right\}$$

für $p+1 \leq r \leq n$ und $0 \leq k \leq n-1$ falls $r \neq \lambda, \lambda+1$
bzw. für $p-1 \leq k \leq n-1$ falls $r = \lambda, \lambda+1$.

Sei $c \in \mathbb{R}$ fest und $I_1 = (-\infty, c]$, $I_2 = [c, \infty)$. Dann gilt für $x \in I_1$ bzw. $x \in I_2$ gleichmäßig bzgl. x und $\varrho \in S_{\alpha k}$,

$$(4.15) \quad y_r^{(k)}(x, \varrho) = (\varrho \omega_{r-p})^k e^{\varrho \omega_{r-p} x} \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{\varrho}\right) \right\}$$

für $0 \leq k \leq p-2$ falls $r = \lambda$ bzw. $r = \lambda+1$.

Für $x \in I_2$ bzw. $x \in I_1$ gilt gleichmäßig bzgl. x und $\varrho \in S_{\alpha k}$, $|\varrho| > |\varrho_0|$

$$(4.16) \quad y_r^{(k)}(x, \varrho) = (\varrho \omega_{r-p})^k e^{\varrho \omega_{r-p} x} - \sum_{\mu=1}^p h_{\mu}^{(k)}(x) \psi_{\mu, r}(x, \varrho) \\ = 0 \left((\varrho \omega_{r-p})^k e^{\varrho \omega_{r-p} x} / \varrho \right) \quad 0 \leq k \leq n-1; j = \lambda \text{ bzw. } j = \lambda+1.$$

Dabei gilt für $x \in I_2$ bzw. $x \in I_1$ gleichmäßig bzgl. x und $\varrho \in S_{\alpha_k}$,
 $|\varrho| > |\varrho_0|$

$$\Psi_{\mu r}(x, \varrho) = O\left(e^{\varrho \omega r - p^x} / \varrho\right)$$

für $r = \mathcal{K}$ bzw. $r = \mathcal{K} + 1$.

Im Falle $I = [0, \infty)$ erhalten wir den folgenden, zu Satz 4.1 analogen Satz:

Satz 4.2 Sei $\{h_1(x), \dots, h_p(x)\}$ ein Fundamentalsystem der Dgl. $n(y) = 0$, welches die Abschätzungen von Satz 3.2 erfüllt, dann existiert unter den Voraussetzungen (4.4), ..., (4.8) in I für jeden Sektor S_{α_k} ein Fundamentalsystem $\{y_1(x, \varrho), \dots, y_n(x, \varrho)\}$ der Dgl. (4.1), welches in I den Abschätzungen (4.9), (4.11), (4.12) und (4.13) genügt.

Beim Beweis dieser Sätze werden wir uns auf den Fall $I = (-\infty, \infty)$ beschränken, der Beweis von Satz 4.2 verläuft ganz analog zum Beweis von Satz 4.1, d.h. auch in diesem Fall müssen wir zuerst einen zu Lemma 4.1 analogen Hilfssatz beweisen.

Bemerkung: Die Voraussetzung, daß die Koeffizienten bei den zweithöchsten Ableitungen in $m(y)$ bzw. $n(y)$ verschwinden, ist eine Beschränkung der Allgemeinheit. Falls dies nicht der Fall ist, lassen sich aber unter geeigneten Voraussetzungen an die Koeffizientenfunktionen die folgenden, zu [7a], Satz 1 analogen Abschätzungen herleiten:

Lemma 4.2 Falls wir $m(y)$ bzw. $n(y)$ durch $m_1(y) = m(y) + f_1(x)y^{(n-1)}$ bzw. $n_1(y) = n(y) + g_1(x)y^{(p-1)}$ ersetzen, erhalten wir für die Dgl. $m_1(y) = \lambda n_1(y)$ unter geeigneten Voraussetzungen an die Koeffizientenfunktionen $f_j(x)$ und $g_k(x)$ ein Fundamentalsystem $\{y_1(x, \varrho), \dots, y_n(x, \varrho)\}$, welches die Abschätzungen (4.9), (4.12) und im Fall $I = (-x, x)$ (4.10) erfüllt.

Statt (4.11) gilt gleichmäßig bzgl. $x \in I$ und $\varrho \in S_{\alpha k}, |\varrho| > |\varrho_0|$

$$y_v^{(k)}(x, \varrho) = (\varrho \omega_{v-p})^k e^{\varrho \omega_{v-p} x} y_0(x) \left(1 + o\left(\frac{1}{\varrho}\right)\right) \\ p+1 \leq v \leq n; 0 \leq k \leq n-1.$$

Statt (4.13) gilt für $x \rightarrow \infty$ im Inneren des Sektors S_{0k}

$$y_v^{(k)}(x, \varrho) = (\varrho \omega_{v-p})^k e^{\varrho \omega_{v-p} x} y_0(x) (1 + o(1)).$$

Dabei ist $y_0(x) = d e^{\frac{1}{n-p} \int_a^x (g_1(t) - f_1(t)) dt}$ mit $c_1 \in \mathbb{R}, d \in \mathbb{C}$.

Der Beweis dieses Satzes verläuft ganz analog zum Beweis der Sätze 4.1, 4.2. Der einzige Unterschied besteht darin, daß man die Bedingungen an die Koeffizientenfunktionen abändern muß, weil $y_0(x)$ als zusätzlicher Faktor in der bei dem Beweis verwandten, zu (4.1) äquivalenten Integrodifferentialgleichung auftritt.

Beweis zu Lemma 4.1

1) Herleitung der Integrodifferentialgleichung

Zum Beweis der Abschätzungen von Lemma 4.1 formen wir die Dgl. (4.1) um, indem wir $n(y) = u$ substituieren, damit ist (4.1) äquivalent zu

$$(4.17) \quad u^{(n-p)} + \sum_{v=2}^{n-p} k_v(x) u^{(n-p-v)} - \lambda u = \sum_{v=1}^p l_v(x) y^{(p-v)} =: r_x(y)$$

Die neuen Koeffizientenfunktionen $k_v(x)$ bestehen aus Summen von Produkten der Funktionen $f_\mu(x), g_j^{(k)}(x)$ mit $2 \leq \mu, j+k \leq v$, die Funktionen $l_v(x)$ bestehen aus Summen von Produkten der Funktionen $f_\mu(x), g_j^{(k)}(x)$ mit $2 \leq \mu', j+k \leq n-p+v$,

daher erfüllen $k_v(x)$ bzw. $l_\mu(x)$ die Abschätzungen bzw. Integrierbarkeitseigenschaften, die von den Funktionen $f_v(x)$ bzw. $f_{n-p+\mu}(x)$ erfüllt werden (siehe Lemma 7.2 und Lemma 7.3).

Aus den Voraussetzungen (4.4) und (4.5) folgt mit §2, daß die linke Seite der Dgl. (4.17) ein Fundamentalsystem $\{u_1(x, \rho), \dots, u_{n-p}(x, \rho)\}$ besitzt, welches den Abschätzungen (2.2), (2.3) und (2.4) genügt.

Durch Variation der Konstanten gelangen wir zu der zu (4.1) äquivalenten Integrodifferentialgleichung

$$n(y) = u = \sum_{v=1}^{n-p} d_v u_v(x, \rho) + \sum_{v=1}^{n-p} u_v(x, \rho) \int_{\alpha_{1v}}^x w_v(t, \rho) r_t(y) dt.$$

Hierbei sind d_v und α_{1v} für $1 \leq v \leq n-p$ beliebige Konstanten und $|w| \cdot w_v(x, \rho)$ ist die Adjunkte von $u_v^{(n-p-1)}(x, \rho)$ in der Wronskimatrix w der Funktionen $u_1(x, \rho), \dots, u_{n-p}(x, \rho)$. Wegen Satz 2.1 gilt gleichmäßig für alle $x \in (-\infty, \infty)$ und alle $\rho \in S_{\alpha_k}$ mit $|\rho| > |\rho_0|$

$$(4.18) \quad w_v^{(j)}(x, \rho) = \frac{\omega_v}{n-p} \frac{(-\rho \omega_v)^j}{\rho^{n-p-1}} e^{-\rho \omega_v x} \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{\rho}\right) \right\} \quad \begin{array}{l} 1 \leq v \leq n-p \\ 0 \leq j \leq n-p-1 \end{array}$$

Nun verwenden wir das Fundamentalsystem $\{h_1(x), \dots, h_p(x)\}$ der Dgl. $n(y) = 0$ aus Satz 3.1 und gelangen durch erneute Variation der Konstanten zu der zu (4.1) äquivalenten Integrodifferentialgleichung

$$(4.19) \quad y(x, \rho) = \sum_{\mu=1}^p e_\mu h_\mu(x) + \sum_{\mu=1}^p \sum_{v=1}^{n-p} h_\mu(x) \int_{\alpha_{2\mu}}^x p_\mu(t) u_v(t, \rho) d_v dt \\ + \sum_{\mu=1}^p \sum_{v=1}^{n-p} h_\mu(x) \int_{\alpha_{2\mu}}^x p_\mu(t) u_v(t, \rho) \int_{\alpha_{1v}}^t w_v(\tau, \rho) r_\tau(y) d\tau dt$$

mit beliebigen Konstanten e_μ und $\alpha_{2\mu}$ und den in der Wronski-

matrix p der Funktionen $\{h_1(x), \dots, h_p(x)\}$ zu $h_{\mu}^{(p-1)}(x)$ gehörenden Adjunkten $|p| \cdot p_{\mu}(x)$.

Wegen (4.4) und (4.5) ist $p_{\mu}(x)$ $(p+1)$ -mal differenzierbar und aufgrund der Abschätzungen (3.8), ..., (3.10) gelten für $1 \leq \mu \leq p$ die Abschätzungen

$$p_{\mu}^{(j)}(x) = x^{p-\mu-j} \binom{p-\mu}{j} j! \{1+o(1)\} \quad \text{für } x \rightarrow \infty$$

$$0 \leq j \leq p-\mu-1$$

$$(4.20) \quad p_{\mu}^{(j)}(x) = o(x^{p-\mu-j}) \quad \text{für } x \rightarrow \infty$$

$$p-\mu \leq j \leq p+1$$

$$p_{\mu}^{(j)}(x) = O(x^{p-1-j}) \quad \text{für } x \in (-\infty, \infty)$$

$$0 \leq j \leq p+1$$

Ferner gilt für $1 \leq \mu \leq p, 0 \leq k \leq n-1, 0 \leq j \leq p+1$ und $x \in (-\infty, \infty)$

$$(4.21) \quad h_{\mu}^{(k)}(x) p_{\mu}^{(j)}(x) = O(x^{p-1-k-j}).$$

Mit Hilfe von (4.19) werden wir nun durch geeignete Wahl der Konstanten $d_{\nu}, e_{\mu}, \alpha_1$ und $\alpha_{2\mu}$ die Existenz eines Fundamentalsystems $\{y_1(x, \zeta), \dots, y_n(x, \zeta)\}$ der Dgl. (4.1) mit den in Lemma 4.1 aufgezählten Eigenschaften nachweisen, dabei werden die folgenden Beziehungen verwandt

$$(4.22) \quad u_{\nu}(x, \zeta) = \frac{1}{\zeta^{n-p}} \left\{ u_{\nu}^{(n-p)}(x, \zeta) + \sum_{\eta=2}^{n-p} k_{\eta}(x) u_{\nu}^{(n-p-\eta)}(x, \zeta) \right\}$$

$$1 \leq \nu \leq n-p$$

$$(4.23) \quad \sum_{\nu=1}^{n-p} u_{\nu}^{(k)}(x, \zeta) w_{\nu}^{(\mu)}(x, \zeta) = (-1)^{\mu} \zeta^{\mu, n-p-1-k}$$

$$0 \leq \mu + k \leq n-p-1$$

und

$$(4.24) \quad \sum_{\mu=1}^p h_{\mu}^{(k)}(x) p_{\mu}^{(v)}(x) = (-1)^v \int_{v, p-1-k}$$

$$k+v \leq p-1.$$

Zur Herleitung der gewünschten asymptotischen Abschätzungen bilden wir die ersten $p-1$ Ableitungen in (4.19), anschließend setzen wir (4.22) in die entstehenden Gleichungen ein und erhalten für $0 \leq k \leq p-1$ und $1 \leq r \leq n$

$$\begin{aligned} (4.25) \quad y_r^{(k)}(x, \varrho) &= \sum_{\mu=1}^p e_{\mu}^r h_{\mu}^{(k)}(x) \\ &+ \frac{1}{\varrho^{n-p}} \sum_{\mu=1}^p \sum_{v=1}^{n-p} h_{\mu}^{(k)}(x) \int_{\alpha_{2\mu}^r}^x p_{\mu}(t) \{ u_v^{(n-p)}(t, \varrho) + \\ &\quad + \sum_{\eta=2}^{n-p} k_{\eta}(t) u_v^{(n-p-\eta)}(t, \varrho) \} d_{\alpha_{2\mu}^r}^r dt \\ &+ \frac{1}{\varrho^{n-p}} \sum_{\mu=1}^p \sum_{v=1}^{n-p} h_{\mu}^{(k)}(x) \int_{\alpha_{2\mu}^r}^x p_{\mu}(t) \{ u_v^{(n-p)}(t, \varrho) \\ &\quad + \sum_{\eta=2}^{n-p} k_{\eta}(t) u_v^{(n-p-\eta)}(t, \varrho) \} \int_{\alpha_{1v}^r}^t w_v(\tau, \varrho) r_{\tau}^r(y_r) d\tau dt \\ &=: \sum_{\mu=1}^p e_{\mu}^r h_{\mu}^{(k)}(x) + I_0^k + \sum_{\eta=2}^{n-p} I_{\eta}^k + II_0^k + \sum_{\eta=2}^{n-p} II_{\eta}^k. \end{aligned}$$

Die Integralterme in I_j und II_j mit $u_v^{(n-p)}(t, \varrho)$ bzw. mit $u_v^{(n-p-\eta)}(t, \varrho)$ werden nun $(p+1)$ -mal bzw. $(p-\eta+1)$ -mal partiell integriert, falls $(p-\eta) \geq 0$ ist. Dabei müssen wir eventuell (4.22) wiederholt für $u_{\nu}(t, \varrho)$ einsetzen und zwar genau ξ -mal, wobei ξ durch $(\xi-1)(n-p) < p+1 \leq \xi(n-p)$ bestimmt ist. O.B.d.A. nehmen wir hier $\xi=1$ an.

Zunächst betrachten wir die Summanden I_j^k von (4.25). Wegen (4.24) verschwinden bei den $p-k-1$ ersten partiellen Integrationen die Terme an der oberen Integrationsgrenze,

die an der unteren Integrationsgrenze entstehenden konstanten Faktoren bezeichnen wir mit

$$f_{\mu \nu r}^{j, j} \quad 1 \leq \mu \leq p; 1 \leq \nu \leq n-p; p+1 \leq r \leq n; 1 \leq j \leq p-\eta+1; \eta=0, 2, 3, \dots, p.$$

Bei der $(p-k)$ -ten partiellen Integration des Terms I_0^k entsteht der Ausdruck

$$(4.26) \quad \frac{1}{\oint_{n-p}} \sum_{\nu=1}^{n-p} u_{\nu}^{(n-2p+k)}(x, \xi) d_{\nu}^r,$$

bei den weiteren partiellen Integrationen erhalten wir an der oberen Grenze die Terme

$$(4.27) \quad \frac{(-1)^{p-k+j}}{\oint_{n-p}} \sum_{\mu=1}^p \sum_{\nu=1}^{n-p} u_{\nu}^{(n-2p+k-j)}(x, \xi) d_{\nu}^r \quad 1 \leq j \leq k+1.$$

Daraus folgt (4.28)

$$\begin{aligned} I_0^k &= \frac{1}{\oint_{n-p}} \sum_{\mu=1}^p \sum_{\nu=1}^{n-p} h_{\mu}^{(k)}(x) \int_{\alpha_{2\mu}^r}^x p_{\mu}(t) u_{\nu}^{(n-p)}(t, \xi) d_{\nu}^r dt \\ &= \sum_{i=1}^{p+1} \sum_{\mu=1}^p \sum_{\nu=1}^{n-p} h_{\mu}^{(k)}(x) f_{\mu \nu r}^{0j} + \frac{1}{\oint_{n-p}} \sum_{\nu=1}^{n-p} u_{\nu}^{(n-2p+k)}(t, \xi) d_{\nu}^r dt \\ &\quad + \frac{1}{\oint_{n-p}} \sum_{j=1}^{k+1} \sum_{\mu=1}^p \sum_{\nu=1}^{n-p} (-1)^{p-k-1+j} h_{\mu}^{(k)}(x) p_{\mu}^{(p-k-1+j)}(x) u_{\nu}^{(n-2p+k-j)}(t, \xi) d_{\nu}^r dt \\ &\quad + \frac{(-1)^{p+1}}{\oint_{n-p}} \sum_{\mu=1}^p \sum_{\nu=1}^{n-p} h_{\mu}^{(k)}(x) \int_{\alpha_{2\mu}^r}^x p_{\mu}^{(p+1)}(t) u_{\nu}^{(n-2p-1)}(t, \xi) d_{\nu}^r dt \end{aligned}$$

Für die Terme I_{η}^k in (4.25) gilt (4.29)

$$I_{\eta}^k = \frac{1}{\oint_{n-p}} \sum_{\mu=1}^p \sum_{\nu=1}^{n-p} h_{\mu}^{(k)}(x) \int_{\alpha_{2\mu}^r}^x p_{\mu}(t) k_{\eta}(t) u_{\nu}^{(n-p-\eta)}(t, \xi) d_{\nu}^r dt =$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{j=1}^{p-k} \sum_{\mu=1}^p \sum_{v=1}^{n-p} h_{\mu}^{(k)}(x) f_{\mu v r}^{\eta j} \\
 &+ \frac{1}{\oint_{n-p}} k_{\eta}(x) \sum_{v=1}^{n-p} u_v^{(n-2p-\eta+k)}(x, \varrho) d_{\underline{v}}^r \\
 &+ \frac{(-1)^{p-k}}{\oint_{n-p}} \sum_{\mu=1}^p \sum_{v=1}^{n-p} h_{\mu}^{(k)}(x) \int_{\alpha_{2\mu}^T}^x (p_{\mu}(t) k_{\eta}(t))^{(p-k)} u_v^{(n-2p-\eta+k)}(t, \varrho) d_{\underline{v}}^r dt \\
 &= \sum_{j=1}^{p-\eta+1} \sum_{\mu=1}^p \sum_{v=1}^{n-p} h_{\mu}^{(k)}(x) f_{\mu v r}^{\eta j} \\
 &+ \frac{1}{\oint_{n-p}} k_{\eta}(x) \sum_{v=1}^{n-p} u_v^{(n-2p-\eta+k)}(x, \varrho) d_{\underline{v}}^r \\
 &+ \sum_{j=1}^{k-\eta+1} \sum_{\mu=1}^p \sum_{v=1}^{n-p} \frac{(-1)^{p-k-1+j}}{\oint_{n-p}} h_{\mu}^{(k)}(x) (p_{\mu}(x) k_{\eta}(x))^{(p-k-1+j)} u_v^{(n-2p-\eta+k+j)} d_{\underline{v}}^r \\
 &+ \frac{(-1)^{p-\eta+1}}{\oint_{n-p}} \sum_{\mu=1}^p \sum_{v=1}^{n-p} h_{\mu}^{(k)}(x) \int_{\alpha_{2\mu}^T}^x (p_{\mu}(t) k_{\eta}(t))^{(p-\eta+1)} u_v^{(n-2p-1)}(t, \varrho) d_{\underline{v}}^r dt.
 \end{aligned}$$

Nun integrieren wir die Terme II_j^k mit $u_v^{(n-p)}(t, \varrho)$ bzw. $u_v^{(n-p-\eta)}(t, \varrho)$ $(p+1)$ -mal bzw. $(p-\eta+1)$ -mal partiell, falls $(p-\eta+1) > 0$ ist. Es würde genügen $(p-(n-p)+1)$ -mal bzw. $(p-\eta-(n-p)+1)$ -mal zu integrieren für $(p-\eta-(n-p)+1) > 0$. Wir führen hier jedoch die partiellen Integrationen der Vollständigkeit halber aus. Für den Term II_0^k erhalten wir

$$\begin{aligned}
 II_0^k &= \sum_{\mu=1}^p \sum_{v=1}^{n-p} \frac{h_{\mu}^{(k)}(x)}{\oint_{n-p}} \int_{\alpha_{2\mu}^T}^x p_{\mu}(t) u_v^{(n-p)}(t, \varrho) \int_{\alpha_{1v}^T}^t w_v(\tau, \varrho) r_{\tau}(y_r) d\tau dt \\
 &= \sum_{\mu=1}^p \sum_{v=1}^{n-p} \frac{h_{\mu}^{(k)}(x)}{\oint_{n-p}} p_{\mu}(t) u_v^{(n-p-1)}(t, \varrho) \int_{\alpha_{1v}^T}^t w_v(\tau, \varrho) r_{\tau}(y_r) d\tau \Big|_{\alpha_{2\mu}^T}^x \\
 &- \sum_{\mu=1}^p \sum_{v=1}^{n-p} \frac{h_{\mu}^{(k)}(x)}{\oint_{n-p}} \int_{\alpha_{2\mu}^T}^x p_{\mu}'(t) u_v^{(n-p-1)}(t, \varrho) \int_{\alpha_{1v}^T}^t w_v(\tau, \varrho) r_{\tau}(y_r) d\tau dt
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \frac{1}{\varrho^{n-p}} \sum_{\mu=1}^p h_{\mu}^{(k)}(x) \int_{\alpha_{2\mu}^{\tau}}^x p_{\mu}(t) r_t(y_r) dt \\
 & = \sum_{j=1}^{p+1} \sum_{\mu=1}^p \sum_{v=1}^{n-p} h_{\mu}^{(k)}(x) g_{\mu v r}^{0j} \\
 & + \frac{1}{\varrho^{n-p}} \sum_{v=1}^{n-p} u_v^{(n-2p+k)}(x, \varrho) \int_{\alpha_{1v}^{\tau}}^x w_v(\tau, \varrho) r_{\tau}(y_r) d\tau \\
 & - \frac{1}{\varrho^{n-p}} \sum_{\mu=1}^p h_{\mu}^{(k)}(x) \int_{\alpha_{2\mu}^{\tau}}^x p_{\mu}(t) r_t(y_r) dt \\
 & (4.30) \\
 & + \frac{(-1)^{p+1}}{\varrho^{n-p}} \sum_{\mu=1}^p \sum_{v=1}^{n-p} h_{\mu}^{(k)}(x) \int_{\alpha_{2\mu}^{\tau}}^x p_{\mu}^{(p+1)}(t) u_v^{(n-2p-1)}(t, \varrho) \int_{\alpha_{1v}^{\tau}}^t w_v(\tau, \varrho) r_{\tau}(y_r) d\tau dt \\
 & + \frac{(-1)^{p-k-1}}{\varrho^{n-p}} \sum_{j=1}^{p-k-1} \sum_{\mu=1}^p \sum_{v=1}^{n-p} (-1)^j h_{\mu}^{(k)}(x) p_{\mu}^{(p-k-1+j)}(x) u_v^{(n-2p+k-j)}(x, \varrho) \int_{\alpha_{1v}^{\tau}}^x w_v(\tau, \varrho) r_{\tau}(y_r) d\tau
 \end{aligned}$$

Dabei sind mit $g_{\mu v r}^{ij}$ die an der unteren Integrationsgrenze entstehenden konstanten Faktoren bezeichnet worden, und wir haben berücksichtigt, daß wegen (4.24) bei den $(p-k-1)$ ersten partiellen Integrationen die Terme an der oberen Integrationsgrenze verschwinden. Analog erhalten wir durch partielle Integration der Terme II_{η}^k

$$\begin{aligned}
 II_{\eta}^k & = \sum_{\mu=1}^p \sum_{v=1}^{n-p} \frac{h_{\mu}^{(k)}(x)}{\varrho^{n-p}} \int_{\alpha_{2\mu}^{\tau}}^x p_{\mu}(t) k_{\eta}(t) u_v^{(n-p-\eta)}(t, \varrho) \int_{\alpha_{1v}^{\tau}}^t w_v(\tau, \varrho) r_{\tau}(y_r) d\tau dt \\
 & = \sum_{j=1}^{p-\eta+1} \sum_{\mu=1}^p \sum_{v=1}^{n-p} h_{\mu}^{(k)}(x) g_{\mu v r}^{\eta j} \\
 & + \frac{k_{\eta}(x)}{\varrho^{n-p}} \sum_{v=1}^{n-p} u_v^{(n-2p-\eta+k)}(x, \varrho) \int_{\alpha_{1v}^{\tau}}^x w_v(\tau, \varrho) r_{\tau}(y_r) d\tau
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{j=1}^{k-\eta+1} \sum_{\mu=1}^p \sum_{v=1}^{n-p} \frac{(-1)^{p-k-1-j}}{\rho^{n-p}} h_{\mu}^{(k)}(x) (p_{\mu}(x) k_{\eta}(x))^{(p-k-1+j)} \cdot \\
 & \quad \cdot u_{\nu}^{(n-2p-\eta+k-j)}(x, \rho) \int_{\alpha_{1\nu}^{\tau}}^x w_{\nu}(\tau, \rho) r_{\tau}(y_{\tau}) d\tau \\
 (4.31) \quad & + \frac{(-1)^{p-\eta+1}}{\rho^{n-p}} \sum_{\mu=1}^p \sum_{v=1}^{n-p} h_{\mu}^{(k)}(x) \int_{\alpha_{2\mu}^{\tau}}^x (p_{\mu}(t) k_{\eta}(t))^{(p-\eta+1)} u_{\nu}^{(n-2p-1)}(t, \rho) \cdot \\
 & \quad \cdot \int_{\alpha_{1\nu}^{\tau}}^t w_{\nu}(\tau, \rho) r_{\tau}(y_{\tau}) d\tau dt.
 \end{aligned}$$

Nach den obigen Umformungen erhalten wir aus (4.25) für
 $1 \leq r \leq n$ und $0 \leq k \leq p-1$

$$(4.32) \quad y_r^{(k)}(x, \rho) = \sum_{\mu=1}^p e_{\mu}^r h_{\mu}^{(k)}(x)$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{\substack{\eta=0 \\ \eta \neq 1}}^p \sum_{j=1}^{p-\eta+1} \sum_{\mu=1}^p \sum_{v=1}^{n-p} h_{\mu}^{(k)}(x) (f_{\mu\nu}^{\eta j} + g_{\mu\nu}^{\eta j}) \\
 & + \frac{1}{\rho^{n-p}} \sum_{v=1}^{n-p} u_{\nu}^{(n-2p+k)}(x, \rho) d_{\nu}^r \\
 & + \sum_{j=1}^{k+1} \sum_{\mu=1}^p \sum_{v=1}^{n-p} \frac{(-1)^{p-k+j}}{\rho^{n-p}} h_{\mu}^{(k)}(x) p_{\mu}^{(p-k+j-1)}(x) u_{\nu}^{(n-2p+k-j)}(x, \rho) d_{\nu}^r \\
 & + \frac{(-1)^{p+1}}{\rho^{n-p}} \sum_{\mu=1}^p \sum_{v=1}^{n-p} h_{\mu}^{(k)}(x) \int_{\alpha_{2\mu}^{\tau}}^x p_{\mu}^{(p+1)}(x) u_{\nu}^{(n-2p-1)}(x, \rho) d_{\nu}^r dt \\
 & + \sum_{\eta=2}^p \sum_{\mu=1}^p \sum_{v=1}^{n-p} \frac{(-1)^{p-\eta+1}}{\rho^{n-p}} h_{\mu}^{(k)}(x) \int_{\alpha_{2\mu}^{\tau}}^x (p_{\mu}(t) k_{\eta}(t))^{(p-\eta+1)} u_{\nu}^{(n-2p-1)}(x, \rho) d_{\nu}^r dt \\
 & + \sum_{\eta=p+1}^{n-p} \sum_{\mu=1}^p \sum_{v=1}^{n-p} \frac{h_{\mu}^{(k)}(x)}{\rho^{n-p}} \int_{\alpha_{2\mu}^{\tau}}^x p_{\mu}(t) k_{\eta}(t) u_{\nu}^{(n-p-\eta)}(t, \rho) d_{\nu}^r dt -
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \sum_{\mu=1}^p \frac{h_{\mu}^{(k)}(x)}{\oint^{n-p}} \int_{\alpha_{2\mu}^{\tau}}^x p_{\mu}(t) r_t(y_r) dt \\
 & + \sum_{v=1}^{n-p} \frac{u_v^{(n-2p+k)}(x, \wp)}{\oint^{n-p}} \int_{\alpha_{1v}^{\tau}}^x w_v(\tau, \wp) r_{\tau}(y_r) d\tau \\
 & + \sum_{j=1}^{k+1} \sum_{\mu=1}^p \sum_{v=1}^{n-p} \frac{(-1)^{p-k-1+j}}{\oint^{n-p}} h_{\mu}^{(k)}(x) p_{\mu}^{(p-k-1+j)}(x) u_v^{(n-2p+k-j)}(x, \wp) \int_{\alpha_{1v}^{\tau}}^x w_v(\tau, \wp) r_{\tau}(y_r) d\tau \\
 & + \frac{(-1)^{p+1}}{\oint^{n-p}} \sum_{\mu=1}^p \sum_{v=1}^{n-p} h_{\mu}^{(k)}(x) \int_{\alpha_{2\mu}^{\tau}}^x p_{\mu}^{(p+1)}(x) u_v^{(n-2p-1)}(t, \wp) \int_{\alpha_{1v}^{\tau}}^t w_v(\tau, \wp) r_{\tau}(y_r) d\tau dt \\
 & + \sum_{\gamma=2}^p \sum_{\mu=1}^p \sum_{v=1}^{n-p} \frac{(-1)^{p-\gamma+1}}{\oint^{n-p}} h_{\mu}^{(k)}(x) \int_{\alpha_{2\mu}^{\tau}}^x (p_{\mu}(t) k_{\gamma}(t))^{(p-\gamma+1)} u_v^{(n-2p-1)}(t, \wp) \cdot \\
 & \quad \int_{\alpha_{1v}^{\tau}}^t w_v(\tau, \wp) r_{\tau}(y_r) d\tau dt \\
 & + \sum_{\gamma=p+1}^{n-p} \sum_{\mu=1}^p \sum_{v=1}^{n-p} \frac{h_{\mu}^{(k)}(x)}{\oint^{n-p}} \int_{\alpha_{2\mu}^{\tau}}^x p_{\mu}(t) k_{\gamma}(t) u_v^{(n-p-\gamma)}(t, \wp) \int_{\alpha_{1v}^{\tau}}^t w_v(\tau, \wp) r_{\tau}(y_r) d\tau dt \\
 & + R_r^k(x, \wp)
 \end{aligned}$$

Hierbei ist $R_r^k(x, \wp)$ die Summe der Terme, die bei der partiellen Integration der Summanden I_{η}^k und II_{η}^k an der oberen Integrationsgrenze x entstanden sind, d.h. die Summe der jeweils vorletzten Terme in (4.29) und (4.31).

2) Herleitung der Abschätzungen für den ersten Teil des Fundamentalsystems

Wir beschränken uns hier auf den Fall $n-p=2\alpha, \alpha$ gerade und setzen $\alpha=0$; die Fälle $n-p=2\alpha, \alpha$ ungerade bzw. $n-p=2\alpha+1$ lassen sich analog behandeln.

Zur Herleitung der asymptotischen Abschätzungen für ein Fundamentalsystem $\{y_1(x, \rho), \dots, y_n(x, \rho)\}$ der Dgl. (4.1) verwenden wir die Methode der sukzessiven Approximation und benutzen dazu die zu (4.1) äquivalente Integrodifferentialgleichung (4.32).

Wir setzen für $1 \leq r \leq p$ und $i = 0, 1, 2, \dots$

$$(4.33) \quad \begin{aligned} y_{r,0} &= h_r(x) \\ y_{r,i+1} &= F(y_{r,i}) \end{aligned}$$

Dabei sei $\{h_1(x), \dots, h_p(x)\}$ das in §3 abgeschätzte Fundamentalsystem der Dgl. $n(y)=0$ und $F(y_{r,i})$ sei die Funktion, die man erhält, wenn man auf der rechten Seite von (4.32) y_r durch $y_{r,i}$ ersetzt.

Wir werden nun zeigen, daß die Funktionen

$$y_{r,i}^{(k)}(x, \rho) \text{ für } 1 \leq r \leq p, 0 \leq k \leq n-1, i \geq 0$$

bei geeigneter Wahl der Konstanten $e_{\mu}^r, d_{\nu}^r, \alpha_{1\mu}^r, \alpha_{2\mu}^r$ in (4.32) die Abschätzungen (4.9), (4.10) und (4.12) erfüllen und daß die Funktionen

$$\begin{array}{ll} y_{r,i}^{(k)}(x, \rho) (1+|x|)^{k+1-p} & \text{für } k+1 < p \\ \text{bzw.} & \text{und } 1 \leq r \leq p, 0 \leq k \leq n-1 \\ y_{r,i}^{(k)}(x, \rho) & \text{für } k+1 \geq p \end{array}$$

für genügend großes $p \in S_{ok}$ mit $|p| > |p_0|$ und alle $x \in (-\infty, \infty)$ gleichmäßig konvergieren.

Damit ist dann gezeigt, daß die Funktionen

$$y_r^{(k)}(x, \vartheta) = y_{r,0}^{(k)}(x, \vartheta) + \sum_{i=1}^{\infty} (y_{r,i}^{(k)}(x, \vartheta) - y_{r,i-1}^{(k)}(x, \vartheta))$$

$$= \lim_{i \rightarrow \infty} y_{r,i}^{(k)}(x, \vartheta)$$

die Abschätzungen (4.9), (4.10) und (4.12) erfüllen und

Lösungen von (4.32) und somit von (4.1) sind.

Für $1 \leq r \leq p$ setzen wir

$$\begin{aligned}
 e_{\mu}^r &= \delta_{\mu r} - \sum_{\substack{\eta=0 \\ \eta \neq 1}}^p \sum_{j=1}^{p-\eta+1} \sum_{\mu=1}^p \sum_{v=1}^{n-p} (f_{\mu v r}^{\eta j} + g_{\mu v r}^{\eta j}) & 1 \leq \mu \leq p \\
 d_v^r &= 0 & 1 \leq v \leq n-p \\
 \alpha_{1v}^r &= \begin{cases} +\infty \\ -\infty \end{cases} & \begin{aligned} & \mathcal{K}+1 \leq v \leq n-p \\ & 1 \leq v \leq \mathcal{K} \end{aligned} \\
 \alpha_{2\mu}^r &= \infty & 1 \leq \mu \leq p.
 \end{aligned}
 \tag{4.34}$$

Diese Konstanten setzen wir in (4.32) ein und erhalten für $1 \leq r \leq p, 0 \leq k \leq p-1$ und $i \geq 0$

$$\begin{aligned}
 (4.35) \quad y_{r,i+1}^{(k)}(x, \vartheta) &= h_r^{(k)}(x) \\
 &+ \frac{1}{\vartheta^{n-p}} \sum_{\mu=1}^p h_{\mu}^{(k)}(x) \int_x^{\infty} p_{\mu}(t) r_t(y_{r,i}) dt \\
 &+ \frac{1}{\vartheta^{n-p}} \left\{ \begin{aligned} &\sum_{v=1}^{\mathcal{K}} u_v^{(n-2p+k)}(x, \vartheta) \int_{-\infty}^x w_v(\tau, \vartheta) r_{\tau}(y_{r,i}) d\tau \\ &-\sum_{v=\mathcal{K}+1}^{n-p} u_v^{(n-2p+k)}(x, \vartheta) \int_x^{\infty} w_v(\tau, \vartheta) r_{\tau}(y_{r,i}) d\tau \end{aligned} \right. \\
 &+ \frac{1}{\vartheta^{n-p}} \sum_{j=1}^{k+1} \sum_{\mu=1}^p (-1)^{p-k-1+j} h_{\mu}^{(k)}(x) p_{\mu}^{(p-k-1+j)}(x) \cdot \\
 &\cdot \left\{ \begin{aligned} &\sum_{v=1}^{\mathcal{K}} u_v^{(n-2p+k-j)}(x, \vartheta) \int_{-\infty}^x w_v(\tau, \vartheta) r_{\tau}(y_{r,i}) d\tau \\ &-\sum_{v=\mathcal{K}+1}^{n-p} u_v^{(n-2p+k-j)}(x, \vartheta) \int_x^{\infty} w_v(\tau, \vartheta) r_{\tau}(y_{r,i}) d\tau \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \frac{(-1)^{p+1}}{\vartheta^{n-p}} \sum_{\mu=1}^p h_{\mu}^{(k)}(x) \int_x^{\infty} p_{\mu}^{(p+1)}(t) \cdot \\
 & \quad \cdot \left\{ \begin{aligned} & \sum_{v=1}^{\infty} u_v^{(n-2p-1)}(t, \vartheta) \int_{-\infty}^t w_v(\tau, \vartheta) r_{\tau}(y_{r,i}) d\tau dt \\ & - \sum_{v=\kappa+1}^{n-p} u_v^{(n-2p-1)}(t, \vartheta) \int_t^{\infty} w_v(\tau, \vartheta) r_{\tau}(y_{r,i}) d\tau dt \end{aligned} \right. \\
 & - \frac{1}{\vartheta^{n-p}} \sum_{\eta=2}^p \sum_{\mu=1}^p (-1)^{p-\eta+1} h_{\mu}^{(k)}(x) \int_x^{\infty} (p_{\mu}(t) k_{\eta}(t))^{(p-\eta+1)} \cdot \\
 & \quad \cdot \left\{ \begin{aligned} & \sum_{v=1}^{\infty} u_v^{(n-2p-1)}(t, \vartheta) \int_{-\infty}^t w_v(\tau, \vartheta) r_{\tau}(y_{r,i}) d\tau dt \\ & - \sum_{v=\kappa+1}^{n-p} u_v^{(n-2p-1)}(t, \vartheta) \int_t^{\infty} w_v(\tau, \vartheta) r_{\tau}(y_{r,i}) d\tau dt \end{aligned} \right. \\
 & - \frac{1}{\vartheta^{n-p}} \sum_{\eta=\kappa+1}^{n-p} \sum_{\mu=1}^p h_{\mu}^{(k)}(x) \int_x^{\infty} p_{\mu}(t) k_{\eta}(t) \cdot \\
 & \quad \cdot \left\{ \begin{aligned} & \sum_{v=1}^{\infty} u_v^{(n-p-\eta)}(t, \vartheta) \int_{-\infty}^t w_v(\tau, \vartheta) r_{\tau}(y_{r,i}) d\tau dt \\ & - \sum_{v=\kappa+1}^{n-p} u_v^{(n-p-\eta)}(t, \vartheta) \int_t^{\infty} w_v(\tau, \vartheta) r_{\tau}(y_{r,i}) d\tau dt \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

Bezeichnung: Die Summe aus dem 2., 5., 6. und 7. Term in (4.35) bezeichnen wir mit

$$\sum_{\mu=1}^p h_{\mu}^{(k)}(x) \psi_{\mu r i}(x, \vartheta)$$

Nun wird gezeigt: Falls die Funktionen $y_{r,i}^{(k)}(x, \vartheta)$ $1 \leq r \leq p$ die Abschätzungen (4.9), (4.10) und (4.12) erfüllen, so gilt

(i) Die Wahl (4.34) der Konstanten ist erlaubt, d.h.

die in (4.35) auftretenden Integrale existieren.

(ii) Auch die Funktionen $y_{r,i+1}(x,\varrho)$ erfüllen die Abschätzungen (4.9), (4.10) und (4.12).

Da auch die Funktionen $y_{r,0}(x) = h_r(x)$ ($1 \leq r \leq p$) die Abschätzungen (4.9), (4.10) und (4.12) erfüllen, folgt aus (ii) durch vollständige Induktion, daß sämtliche Funktionen $y_{r,i}(x,\varrho)$ $1 \leq r \leq p, i \geq 0$ diese Abschätzungen erfüllen.

Zum Beweis von (i) und (ii) benötigen wir die Abschätzungen für die Fundamentalsysteme $\{h_1(x), \dots, h_p(x)\}$ bzw. $\{u_1(x,\varrho), \dots, u_{n-p}(x,\varrho)\}$ aus den Paragraphen 3 bzw. 2, die Abschätzungen (4.18), (4.20) und (4.21) für die Funktionen $w_v^{(j)}(x,\varrho)$ und $p_\mu^{(1)}(x)$, sowie die Integrierbarkeits- und Wachstumsbedingungen (4.6) und (4.7) für die Koeffizientenfunktionen $f_\mu(x), g_v(x)$ und deren Ableitungen.

Zu (i): Aus den folgenden Abschätzungen, (4.6) und (4.7) sieht man leicht, daß die in (4.35) auftretenden Integrale sämtlich existieren.

$$\begin{aligned} \text{a) } |p_\mu(t) r_t(y_{r,i})| &\leq c_0 |t|^{p-1} \sum_{v=1}^p |l_v(t)| \quad t, \quad p-1-(p-v) \\ &= c_0 \sum_{v=1}^p |l_v(t)| |t|^{p-1+v-1} L(-\infty, \infty) \end{aligned}$$

wegen (4.6).

$$\begin{aligned} \text{b) } &\left| \int_{-\infty}^x \sum_{v=1}^p w_v(\tau, \varrho) r_\tau(y_{r,i}) d\tau \right| \\ &\leq c_1 \int_{-\infty}^x \frac{1}{|\varrho|^{n-p-1}} e^{-\Re(\varrho \omega_\mu)} \sum_{\mu=1}^p |l_\mu(\tau)| |\tau|^{m-1} d\tau \end{aligned}$$

Dieses Integral existiert wegen $-\Re(\varrho \omega_\mu) \tau \leq 0$ für $\tau \leq 0$ und wegen (4.6).

$$\begin{aligned} \text{c) } &\left| \int_x^\infty \sum_{v=\mu+1}^{n-p} w_v(\tau, \varrho) r_\tau(y_{r,i}) d\tau \right| \\ &\leq c_2 \int_x^\infty \frac{1}{|\varrho|^{n-p-1}} e^{-\Re(\varrho \omega_{\mu+1}) \tau} \sum_{\mu=1}^p |l_\mu(\tau)| |\tau|^{m-1} d\tau \end{aligned}$$

dieses Integral existiert, da $-R(\varrho \omega_{\mathcal{R}+1})\tau \leq 0$ ist für $\tau \geq 0$.

$$\begin{aligned} d) & \left| \sum_{\mu=1}^p \int_x^\infty p_\mu^{(p+1)}(t) \sum_{\nu=1}^{\mathcal{R}} \int_{-\infty}^t u_\nu(t, \varrho) w_\nu(\tau, \varrho) r_\tau(y_{r,i}) d\tau dt \right| \\ & \leq c_3 \int_x^\infty \frac{1}{(|t|+1)^2} \int_{-\infty}^t e^{R(\varrho \omega_{\mathcal{R}})(t-\tau)} |r_\tau(y_{r,i})| d\tau dt \\ & \leq c_4 \int_x^\infty \frac{1}{(|t|+1)^2} \int_{-\infty}^t \sum_{j=1}^p |l_j(\tau)| |\tau|^{j-1} d\tau dt \end{aligned}$$

Dieses Integral existiert, da wegen (4.6) das innere Integral existiert und für alle t beschränkt ist.

Ganz analog zu d) erkennt man die Existenz der Integrale

$$e) \sum_{\mu=1}^p \int_x^\infty p_\mu(t) \sum_{\nu=\mathcal{R}+1}^{n-p} \int_t^\infty u_\nu(t, \varrho) w_\nu(\tau, \varrho) r_\tau(y_{r,i}) d\tau dt$$

Die zu d) und e) analogen Integrale, in denen statt $p_\mu^{(p+1)}(t)$ Ausdrücke der Gestalt

$$(p_\mu(t) k_\eta(t))^{(p-\eta+1)} \text{ bzw. } p_\mu(t) k_\eta(t) \quad (\eta \geq p+1)$$

auftreten, existieren ebenfalls, da die genannten Terme wegen (4.6) in $L(-\infty, \infty)$ liegen.

Zu ii): Nun nehmen wir an, daß die Funktionen $y_{r,i}(x, \varrho)$, $1 \leq r \leq p$, die Abschätzungen (4.9), (4.10) und (4.12) erfüllen und zeigen:

Für $1 \leq r \leq p, 0 \leq k \leq p-1$ und ein festes $c \in \mathbb{R}$ gilt

$$y_{r,i+1}^{(k)}(x, \varrho) - h_r^{(k)}(x) = O\left(\frac{1}{\varrho^{n-p}}\right) \text{ für } x \in [c, \infty)$$

(iii)

$$y_{r,i+1}^{(k)}(x, \varrho) - h_r^{(k)}(x) = \sum_{\mu=1}^p h_\mu^{(k)}(x) \psi_{\mu r i}(x, \varrho) + O\left(\frac{1}{\varrho^{n-p}}\right) \text{ für } x \in (-\infty, c]$$

und

$$(iv) \quad y_{r,i+1}^{(k)}(x, \varrho) - h_r^{(k)}(x) = o(1) \quad \text{für } x \rightarrow \infty, \varrho \in S_{0k, \xi}; \quad \xi > 0.$$

Zum Beweis von (iii) und (iv) schätzen wir die einzelnen Summanden von (4.35) ab und nehmen dabei o.B.d.A. $c=0$ an.

a) zweiter Summand von (4.35)

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{\varrho^{n-p}} \sum_{k=1}^p h_{\mu}^{(k)} \int_x^{\infty} p_{\mu}(t) r_t(y_{r,i}) dt \right| \\ & \leq \frac{c_5}{|\varrho|^{n-p}} \int_x^{\infty} |t|^{p-1-k} \sum_{\nu=1}^p |l_{\nu}(t)| |t|^{r-1-p+\nu} dt \\ & \leq \frac{c_5}{|\varrho|^{n-p}} \int_x^{\infty} \sum_{\nu=1}^p |t|^{p-1+\nu-1} |l_{\nu}(t)| dt \end{aligned}$$

Dieses Integral existiert wegen (4.6) und strebt zu Null für $x \rightarrow \infty$.

b) dritter Summand von (4.35)

Zur Herleitung des zweiten Teils der Abschätzungen (4.9) und (4.10) müssen wir den dritten Term von (4.35) noch einmal durch partielle Integration umformen. Wir beachten dabei, daß die Funktionen $w_{\nu}(x, \varrho)$ für die zu (4.17) gehörende homogene adjungierte Gleichung

$$(-1)^{n-p} w_{\nu}^{(n-p)}(x, \varrho) + \sum_{\eta=2}^{n-p} (-1)^{n-p-\eta} (k_{\eta}(x) w_{\nu}^{(n-p-\eta)}(x, \varrho)) = \lambda w_{\nu}(x, \varrho)$$

ist, daher gilt die Beziehung

$$w_{\nu}(x, \varrho) = \frac{1}{\varrho^{n-p}} \left\{ (-1)^{n-p} w_{\nu}^{(n-p)}(x, \varrho) + \sum_{\eta=2}^{n-p} (-1)^{n-p-\eta} (k_{\eta}(x) w_{\nu}^{(n-p-\eta)}(x, \varrho)) \right\}$$

Dies setzen wir in den dritten Term von (4.35) für $w_{\nu}(x, \varrho)$ ein und integrieren den Hauptterm mit $w_{\nu}^{(n-p)}(x, \varrho)$ einmal partiell. Wir erhalten

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{\varrho^{2(n-p)}} \sum_{k=1}^p u_{\nu}^{(n-2p+k)}(x, \varrho) \int_{-\infty}^x w_{\nu}^{(n-p)}(\tau, \varrho) r_{\tau}(y_{r,i}) d\tau \right| \\ & = \left| \frac{1}{\varrho^{2(n-p)}} \sum_{k=1}^p u_{\nu}^{(n-2p+k)}(x, \varrho) w_{\nu}^{(n-p-1)}(x, \varrho) r_x(y_{r,i}) - \right. \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2^{n-p}} \sum_{k=0}^p a^{(n-2p+k)}(x, y) \int_{-\infty}^x a^{(n-p-1)}(\tau, y) \frac{d}{d\tau} r_{\tau}(y_{r,i}) d\tau \quad |$$

$$\leq C_0 \frac{1}{|y|^{n-k}} \left\{ \sum_{\mu=1}^p |l_{\mu}(x)| |x|^{\mu-1} + \int_{-\infty}^x e^{-Q(p\omega_x)(x-\tau)} \sum_{\mu=1}^p |l_{\mu}(\tau)| |\tau|^{\mu-1} d\tau \right\}$$

Der erste Term dieser Summe verhält sich für $x \in (-\sigma, \sigma)$ und $q \in S_{0,x}, |q| > |q_0|$ gleichmäßig wie $O(1/|y|^{n-k})$ und strebt wegen (4.7) zu Null für $x \rightarrow \pm\infty$, der zweite Term verhält sich für $x \in (-\sigma, \sigma)$ und $q \in S_{0,x}, |q| > |q_0|$ ebenfalls gleichmäßig wie $O(1/|y|^{n-k})$. Sei nun q aus dem Inneren von $S_{0,k}$, d.h. es sei $Q(p\omega_x) = \varepsilon$ mit $\varepsilon > 0$, sei ferner $\delta > 0$ fest vorgegeben, dann wählen wir x_0 so groß, daß

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sum_{\mu=1}^p |l_{\mu}(\tau)| |\tau|^{\mu-1} d\tau < \frac{\delta}{2} \text{ gilt, dann folgt}$$

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^x e^{-Q(p\omega_x)(x-\tau)} \sum_{\mu=1}^p |l_{\mu}(\tau)| |\tau|^{\mu-1} d\tau \\ & \leq e^{-\varepsilon x} \int_{-\infty}^x e^{-Q(p\omega_x)\tau} \sum_{\mu=1}^p |l_{\mu}(\tau)| |\tau|^{\mu-1} d\tau \\ & + \int_{x_0}^{\infty} \sum_{\mu=1}^p |l_{\mu}(\tau)| |\tau|^{\mu-1} d\tau = \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} \text{ für } x \geq x_0(\delta). \end{aligned}$$

Analog wird der zweite Term des dritten Summanden von (4.35) abgeschätzt.

c) Der vierte Summand von (4.35) läßt sich wegen

$$|h_{\mu}^{(k)}(x) p_{\mu}^{(p-1-k+j)}(x)| = O\left(\frac{1}{(1+|x|)^j}\right)$$

durch den dritten Summanden abschätzen.

d) fünfter Summand von (4.35)

$$\left| \frac{1}{\varrho^{n-p}} \sum_{\mu=1}^p h_{\mu}^{(k)}(x) \int_x^{\infty} p_{\mu}^{(p+1)}(t) \sum_{\nu=1}^{\infty} u_{\nu}^{(n-2p-1)}(t, \varrho) \cdot \int_{-\infty}^t w_{\nu}(\tau, \varrho) r_{\tau}(y_{r,i}) d\tau dt \right|$$

$$\leq \frac{c_7}{|\varrho|^{n-2p}} \int_x^{\infty} \frac{1}{(1+|t|)^2} \int_{-\infty}^t e^{\Re(\varrho \omega_{\mathcal{K}})(t-\tau)} \sum_{\mu=1}^p |l_{\mu}(\tau)| |\tau|^{\mu-1} d\tau dt$$

wegen (4.6) und (4.7) existiert dieses Integral und strebt zu Null für $x \rightarrow \infty$.

e) Alle übrigen Terme in (4.35) lassen sich analog zu d) abschätzen, dabei ist zu beachten, daß wegen (4.6) die Funktionen

$$h_{\mu}^{(k)}(t) (p_{\mu}(t) k_{\eta}(t))^{(p-\eta+1)} \quad 2 \leq \eta \leq p$$

$$\text{bzw.} \quad h_{\mu}^{(k)}(t) p_{\mu}(t) k_{\eta}(t) \quad p+1 \leq \eta \leq n-p$$

in $L(-\infty, \infty)$ liegen. Die Behauptung (iii) für $x \in (-\infty, c]$ ist aufgrund der Abschätzungen der obigen Integrale ebenfalls erfüllt.

Zur Herleitung der Abschätzungen (4.9), (4.10) und (4.12) für $p \leq k \leq n-1$ setzen wir in (4.35) $k=p-1$ und differenzieren diese Gleichung bis zu $(n-p)$ -mal.

Die Funktionen $y_r^{(p+1)}(x, \varrho)$ enthalten für $0 \leq l \leq n-p-1$ außer den in (4.35) aufgeführten Termen Terme folgender Gestalt:

$$\frac{1}{\varrho^{n-p}} \left(\frac{d}{dx} \right)^l r_x(y_{r,i})$$

$$\frac{1}{\varrho^{n-p}} \sum_{\mu=1}^p h_{\mu}^{(p+j)}(x) \left(\frac{d}{dx} \right)^m \{ p_{\mu}(x) r_x(y_{r,i}) \} \quad j+m \leq l-1$$

(4.36)

$$\frac{1}{\varrho^{n-p}} \sum_{\nu=1}^{n-p} u_{\nu}^{(n-p+j)}(x, \varrho) \left(\frac{d}{dx} \right)^m \{ w_{\nu}(x, \varrho) r_x(y_{r,i}) \} \quad j+m \leq l-1$$

$$\frac{1}{\vartheta^{n-p}} \left(\frac{d}{dx} \right)^{l+1} \left[\sum_{\eta=1}^p \sum_{\mu=1}^p (-1)^{\eta} h_{\mu}^{(p-1)}(x) p_{\mu}^{(\eta)}(x) \cdot \right. \\ \left. \cdot \left\{ \sum_{\nu=1}^{\mathfrak{K}} u_{\nu}^{(n-p-1-\eta)}(x, \vartheta) \int_{-\infty}^x w_{\nu}(\tau, \vartheta) r_{\tau}(y_{r,i}) d\tau \right. \right. \\ \left. \left. - \sum_{\nu=\mathfrak{K}+1}^{n-p} u_{\nu}^{(n-p-1-\eta)}(x, \vartheta) \int_x^{\infty} w_{\nu}(\tau, \vartheta) r_{\tau}(y_{r,i}) d\tau \right\} \right]$$

$$\frac{1}{\vartheta^{n-p}} \sum_{\mu=1}^p h_{\mu}^{(p+j)}(x) \left(\frac{d}{dx} \right)^m \left[p_{\mu}^{(p+1)}(x) \cdot \right. \\ \left. \cdot \left\{ \sum_{\nu=1}^{\mathfrak{K}} u_{\nu}^{(n-2p-1)}(x, \vartheta) \int_{-\infty}^x w_{\nu}(\tau, \vartheta) r_{\tau}(y_{r,i}) d\tau \right. \right. \\ \left. \left. - \sum_{\nu=\mathfrak{K}+1}^{n-p} u_{\nu}^{(n-2p-1)}(x, \vartheta) \int_x^{\infty} w_{\nu}(\tau, \vartheta) r_{\tau}(y_{r,i}) d\tau \right\} \right]$$

$$j+m \leq l-1$$

(4.36)

$$\frac{1}{\vartheta^{n-p}} \sum_{\eta=2}^p \sum_{\mu=1}^p (-1)^{p-\eta+1} h_{\mu}^{(p+j)}(x) \left(\frac{d}{dx} \right)^m \left[(p_{\mu}(x) k_{\eta}(x))^{(p-\eta+1)} \cdot \right. \\ \left. \cdot \left\{ \sum_{\nu=1}^{\mathfrak{K}} u_{\nu}^{(n-2p-1)}(x, \vartheta) \int_{-\infty}^x w_{\nu}(\tau, \vartheta) r_{\tau}(y_{r,i}) d\tau \right. \right. \\ \left. \left. - \sum_{\nu=\mathfrak{K}+1}^{n-p} u_{\nu}^{(n-2p-1)}(x, \vartheta) \int_x^{\infty} w_{\nu}(\tau, \vartheta) r_{\tau}(y_{r,i}) d\tau \right\} \right]$$

$$j+m \leq l-1$$

$$\frac{1}{\vartheta^{n-p}} \sum_{\eta=p+1}^{n-p} \sum_{\mu=1}^p h_{\mu}^{(p+j)}(x) \left(\frac{d}{dx} \right)^m \left[p_{\mu}(x) k_{\eta}(x) \cdot \right. \\ \left. \cdot \left\{ \sum_{\nu=1}^{\mathfrak{K}} u_{\nu}^{(n-p-\eta)}(x, \vartheta) \int_{-\infty}^x w_{\nu}(\tau, \vartheta) r_{\tau}(y_{r,i}) d\tau \right. \right. \\ \left. \left. - \sum_{\nu=\mathfrak{K}+1}^{n-p} u_{\nu}^{(n-p-\eta)}(x, \vartheta) \int_x^{\infty} w_{\nu}(\tau, \vartheta) r_{\tau}(y_{r,i}) d\tau \right\} \right]$$

$$j+m \leq l-1$$

Aus den vorhergehenden Abschätzungen und den Voraussetzungen (4.6) und (4.7) folgt, daß alle in (4.36) vorkommenden Integrale existieren und daß die Funktionen $y_{r,i+1}^{(k)}(x,\varrho)$, $0 \leq k \leq n-1$, die Abschätzungen (4.9), (4.10) und (4.12) erfüllen, falls die Funktionen $y_{r,i}^{(k)}(x,\varrho)$ diese Abschätzungen erfüllen. Zu zeigen bleibt daher nur noch die Konvergenz der sukzessiven Approximation.

3) Konvergenz der sukzessiven Approximation

Wir setzen für $1 \leq r \leq p, i \geq 1$

$$m_{r1}^i(\varrho) = \max_{0 \leq k \leq p-1} \left\{ \sup_{x \in (-\infty, \infty)} (1+|x|)^{k-p+1} |y_{r,i}^{(k)}(x,\varrho) - y_{r,i-1}^{(k)}(x,\varrho)| \right\}$$

$$m_{r2}^i(\varrho) = \max_{p-1 \leq k \leq n-1} \left\{ \sup_{x \in (-\infty, \infty)} |y_{r,i}^{(k)}(x,\varrho) - y_{r,i-1}^{(k)}(x,\varrho)| \right\}$$

und

$$m_r^i(\varrho) = \max(m_{r1}^i(\varrho), m_{r2}^i(\varrho)).$$

Da die Funktionen $y_{r,i}^{(k)}(x,\varrho)$ die Abschätzungen (4.10) erfüllen, gilt

$$m_r^1(\varrho) = 0 \left(\frac{1}{\varrho} \right) \quad 1 \leq r \leq p, i \geq 0$$

und zwar gleichmäßig bzgl. i .

Aus (4.35) folgt damit durch erneutes Abschätzen

$$m_r^{i+1}(\varrho) = 0 \left(\frac{1}{\varrho} \right) m_r^i(\varrho).$$

Für genügend großes $|\varrho|$ gilt somit

$$m_r^{i+1}(\varrho) \leq q m_r^i(\varrho) \leq q^i m_r^1(\varrho) \quad \text{mit } q < 1.$$

Daher konvergieren für $|\varrho| > |\varrho_0|$ und $x \in (-\infty, \infty)$ die Reihen

$$\frac{1}{(1+|x|)^{k-p+1}} \left\{ y_{r,0}^{(k)}(x,\varrho) + \sum_{v=1}^{\infty} [y_{r,v}^{(k)}(x,\varrho) - y_{r,v-1}^{(k)}(x,\varrho)] \right\}$$

absolut und gleichmäßig und die Grenzfunktionen

$$y_r^{(k)}(x, \varrho) = \lim_{\varrho \rightarrow \infty} y_{r, \nu}^{(k)}(x, \varrho)$$

erfüllen die Abschätzungen (4.9), (4.10) und (4.12).

4) Herleitung der Abschätzungen für den zweiten Teil des Fundamentalsystems

Für $p+1 \leq r \leq n$ setzen wir in die durch partielle Integrationen umgeformte Integrodifferentialgleichung (4.32) folgende Werte für die Konstanten $\alpha_{1\nu}^r, \alpha_{2\mu}^r, d_\nu^r$ und e_μ^r ein

$$\alpha_{1\nu}^r = \begin{cases} -\infty & \text{für } 1 \leq \nu \leq r-p-1 \\ +\infty & \text{für } r-p \leq \nu \leq n-p \end{cases}$$

$$\alpha_{2\mu}^r = \begin{cases} -\infty & \text{für } p+k+1 \leq r=n-p \\ +\infty & \text{für } p+1 \leq r \leq p+k \end{cases} \quad 1 \leq \mu \leq p$$

(4.37)

$$d_\nu^r = \begin{cases} 0 & \text{für } \nu \neq r-p \\ (\varrho \omega_{r-p})^p \varrho^{p-1} & \text{für } \nu = r-p \end{cases}$$

$$e_\mu^r = - \sum_{\eta=0}^p \sum_{j=1}^{p-\eta+1} \sum_{\nu=1}^{n-p} (f_{\mu\nu r}^{\eta j} + g_{\mu\nu r}^{\eta j}) \quad 1 \leq \mu \leq p$$

Diese Konstanten setzen wir in (4.32) ein, für $p+1 \leq r \leq p+k$ und $0 \leq k \leq p-1$ gelangen wir nach der Substitution

$$(4.38) \quad y_r^{(k)}(x, \varrho) = \varrho^{p-1} z_{rk}(x, \varrho) u_{r-p}^{(k)}(x, \varrho) \quad \begin{matrix} p+1 \leq r \leq n \\ 0 \leq k \leq n-1 \end{matrix}$$

zu der Gleichung

$$(4.39) \quad \varrho^{-p+1} y_r^{(k)}(x, \varrho) = z_{rk}(x, \varrho) u_{r-p}^{(k)}(x, \varrho)$$

$$= \frac{\omega_{r-p}^p}{\varrho^{n-2p}} u_{r-p}^{(n-2p+k)}(x, \varrho)$$

$$+ \frac{1}{\varrho^{n-1}} \int_{-\infty}^{\infty} a_{r, p-k}(x, \tau, \varrho) s_{\tau}(z_r) d\tau$$

$$+ \sum_{j=1}^{k+1} \sum_{\mu=1}^p \frac{(-1)^{p-k+j}}{\varrho^{n-p}} h_{\mu}^{(k)}(x) p_{\mu}^{(p-k+j-1)}(x).$$

$$\cdot \left\{ u_{r-p}^{(n-2p+k-j)}(x, \varrho) (\varrho \omega_{r-p})^p + \frac{1}{\varrho^{p-1}} \int_{-\infty}^{\infty} a_{r, p-k+j}(x, \tau, \varrho) s_{\tau}(z_r) d\tau \right\}$$

$$- \frac{(-1)^{p+1}}{n-p} \sum_{\mu=1}^p h_{\mu}^{(k)}(x) \int_x^{\infty} p_{\mu}^{(p+1)}(t) dt.$$

$$\cdot \left\{ u_{r-p}^{(n-2p-1)}(t, \varrho) (\varrho \omega_{r-p})^p + \frac{1}{\varrho^{p-1}} \int_{-\infty}^{\infty} a_{r, p+1}(t, \tau, \varrho) s_{\tau}(z_r) d\tau dt \right\}$$

$$- \frac{1}{\varrho^{n-p}} \sum_{\gamma=2}^p \sum_{\mu=1}^p (-1)^{p-\gamma+1} h_{\mu}^{(k)}(x) \int_x^{\infty} [p_{\mu}(t) k_{\gamma}(t)]^{(p-\gamma+1)} dt.$$

$$\cdot \left\{ u_{r-p}^{(n-2p-1)}(t, \varrho) (\varrho \omega_{r-p})^p + \frac{1}{\varrho^{p-1}} \int_{-\infty}^{\infty} a_{r, p+1}(t, \tau, \varrho) s_{\tau}(z_r) d\tau dt \right\}$$

$$- \frac{1}{\varrho^{n-p}} \sum_{\gamma=p+1}^{n-p} \sum_{\mu=1}^p h_{\mu}^{(k)}(x) \int_x^{\infty} p_{\mu}(t) k_{\gamma}(t) dt.$$

$$\left\{ u_{r-p}^{(n-p-\gamma)}(t, \varrho) (\varrho \omega_{r-p})^p + \frac{1}{\varrho^{p-1}} \int_{-\infty}^{\infty} a_{r, \gamma}(t, \tau, \varrho) s_{\tau}(z_r) d\tau dt \right\}$$

$$+ \frac{1}{\varrho^{n-1}} \sum_{\mu=1}^p h_{\mu}^{(k)}(x) \int_x^{\infty} p_{\mu}(t) s_t(z_r) dt$$

$$+ R_r^k(x, \varrho) := \sum_{j=1}^g I_{rkj}(x, \varrho)$$

mit

$$s_{\tau}(z_r) = \sum_{v=1}^p l_v(\tau) z_{r,p-v}(\tau, \varrho) u_{r-p}^{(p-v)}(\tau, \varrho)$$

und

$$a_{r\eta}(t, \tau, \varrho) = \begin{cases} \sum_{v=1}^{r-p-1} u_v^{(n-p-\eta)}(t, \varrho) w_v(\tau, \varrho) & -\infty < \tau \leq t \\ -\sum_{v=\tau-p}^{n-p} u_v^{(n-p-\eta)}(t, \varrho) w_v(\tau, \varrho) & \tau < t < \infty \end{cases}$$

Unter der Voraussetzung, daß $\varrho^{-p+1} y_r^{(k)}(x, \varrho) = z_{rk}(x, \varrho) u_{r-p}^{(k)}(x, \varrho)$ die Abschätzungen (4.13), ..., (4.16) erfüllt, existieren sämtliche in (4.39) vorkommenden Integrale:

$$a) \left| \sum_{v=1}^{r-p-1} w_v(\tau, \varrho) \sum_{\ell=1}^p k_{\ell}(\tau) z_{r,p-1}(\tau, \varrho) u_{r-p}^{(p-1)}(\tau, \varrho) \right| \\ \leq c_1(\varrho) e^{\Re(\varrho \omega_{r-p} - \varrho \omega_{r-p-1})\tau} \sum_{\ell=1}^p |k_{\ell}(\tau)| |z_{r,p-1}(\tau, \varrho)| \in L(-\infty, x)$$

da $\Re(\varrho \omega_{r-p}) \geq \Re(\varrho \omega_{r-p-1})$ und $\sum_{\ell=1}^p k_{\ell}(\tau) z_{r,p-1}(\tau, \varrho) \in L(-\infty, \infty)$ ist, falls $y_r^{(k)}(x, \varrho) / \varrho^{p-1}$ (4.13), ..., (4.16) erfüllt.

$$b) \left| \sum_{v=\tau-p}^{n-p} w_v(\tau, \varrho) \sum_{\ell=1}^p k_{\ell}(\tau) z_{r,p-1}(\tau, \varrho) u_{r-p}^{(p-1)}(\tau, \varrho) \right| \\ \leq c_2(\varrho) e^{\Re(\varrho(\omega_{r-p} - \omega_{v-p}))\tau} \sum_{\ell=1}^p |k_{\ell}(\tau) z_{r,p-1}(\tau, \varrho)| \in L(x, \infty),$$

da $\Re(\varrho \omega_{v-p}) \leq \Re(\varrho \omega_{r-p})$ für $v \geq r$.

$$c) |p_{\mu}^{(p+1)}(t) u_{r-p}^{(n-2p-1)}(t, \varrho)| \leq c_3(\varrho) \left(\frac{1}{1+|t|^2} \right) e^{\Re(\varrho \omega_{r-p})t}$$

$\in L(x, \infty)$, da $\Re(\varrho \omega_{r-p}) \leq 0$ für $p+1 \leq r \leq p+\infty$.

$$d) \left| \int_x^{\infty} p_{\mu}^{(p+1)}(t) \int_{-\infty}^t \sum_{v=1}^{r-p-1} u_v^{(n-2p-1)}(t, \varrho) w_v(\tau, \varrho) s_{\tau}(z_r) d\tau dt \right|$$

$$\leq c_4(\varrho) \int_x^\infty \frac{1}{(1+|t|)^2} \int_{-\infty}^t e^{\Re(\varrho \omega_{r-p-1})t + \Re(\varrho(\omega_{r-p} - \omega_{r-p-1}))\tau} \cdot \sum_{l=1}^p |k_l(\tau) z_{r,p-1}(\tau, \varrho)| d\tau dt$$

Der Integrand bzgl. t ist aus $L(x, \omega)$ da $\Re(\varrho \omega_{r-p-1}) \leq 0$ ist für $r-p \leq \aleph$ und da das innere Integral wegen a) existiert und beschränkt ist.

Analog zu a), ..., d) erkennt man, daß die übrigen in (4.39) auftretenden Integrale existieren, falls $y_r^{(k)}(x, \varrho)/\varrho^{p-1}$ (4.13), ..., (4.16) erfüllt.

Nun setzen wir für $p+1 \leq r = p + \aleph$, $0 \leq k \leq p-1$, $i \geq 0$

$$z_{r,k,0} = 1 \quad (4.40)$$

$$z_{r,k,i+1} = F_1(z_{r,k,i}).$$

Dabei bedeutet $F_1(z_{r,k,i})$ die Funktion, die man erhält, wenn man die rechte Seite der Gleichung (4.39) durch $u_{r-p}^{(k)}(x, \varrho)$ teilt und $z_{r,k}(x, \varrho)$ durch $z_{r,k,i}(x, \varrho)$ ersetzt.

Wir werden nun folgendes beweisen:

(i) Die Funktionen $\varrho^{p-1} y_{r,i}^{(k)}(x, \varrho) = z_{r,k,i}(x, \varrho) u_{r-p}^{(k)}(x, \varrho)$ erfüllen für $p+1 \leq r = p + \aleph$, $0 \leq k \leq n-1$ und $i \geq 0$ die Abschätzungen (4.13), ..., (4.16).

(ii) Die Funktionen

$$(4.41) \quad z_{r,k,i}(x, \varrho) \quad \begin{array}{l} p+1 \leq r \leq p + \aleph - 1, 0 \leq k \leq n-1 \\ r = p + \aleph, p-1 \leq k \leq n-1 \end{array}$$

und die Funktionen

$$(4.42) \quad \frac{1}{(1+|x|)^{p-1-k}} z_{p+\aleph,k,i}(x, \varrho) \quad 0 \leq k \leq p-2$$

konvergieren für genügend großes $\varrho \in \mathbb{S}_{0k}$ mit $|\varrho| > |\varrho_0|$ und alle $x \in (-\infty, \infty)$ gleichmäßig bzgl. x und ϱ .

Zum Beweis von (i) betrachten wir die einzelnen Terme von $z_{r,k,i}(x, \varrho)$ und setzen dabei voraus, daß die Funktionen

$$z_{r,k,i}(x, \varrho) u_{r-p}^{(k)}(x, \varrho) := \sum_{j=1}^{\varrho} I_{r,k,j,i}(x, \varrho)$$

(4.13), ..., (4.16) erfüllen. Ferner bezeichnen wir die Summe aus dem 4., 5., 6. und 7. Term von $z_{r,k}(x, \varrho) u_{r-p}^{(k)}(x, \varrho)$ bzw. $z_{r,k,i}(x, \varrho) u_{r-p}^{(k)}(x, \varrho)$ mit

$$\sum_{\mu=1}^p h_{\mu}^{(k)}(x) \gamma_{\mu r}(x, \varrho) := \sum_{j=4}^7 I_{r,k,j}(x, \varrho) \quad p+1 \leq r \leq n; 0 \leq k \leq n-1$$

bzw.

$$\sum_{\mu=1}^p h_{\mu}^{(k)}(x) \gamma_{\mu r,i}(x, \varrho) := \sum_{j=4}^7 I_{r,k,j,i}(x, \varrho) \quad p+1 \leq r \leq n, 0 \leq k \leq n-1.$$

Mit diesen Bezeichnungen folgt aufgrund der Abschätzungen für die Funktionen $u_{\nu}^{(k)}(x, \varrho)$ aus (4.39) für $p+1 \leq r = p+\alpha$, $0 \leq k \leq p-1$ und $i \geq 0$

$$I_{r,k,1,i}(x, \varrho) = (1 + O(\frac{1}{\varrho})) u_{r-p}^{(k)}(x, \varrho).$$

Mit $I_{r,k,2,i} := I_{r,k,2,i}^1 + I_{r,k,2,i}^2$ folgt

$$a) \left| \frac{I_{r,k,2,i}^1(x, \varrho)}{u_{r-p}^{(k)}(x, \varrho)} \right| = \left| \frac{1}{\varrho^{n-1}} \frac{1}{u_{r-p}^{(k)}(x, \varrho)} \int_{-\infty}^x \sum_{\nu=1}^{r-p-1} u_{\nu}^{(n-2p+k)}(x, \varrho) \cdot \right.$$

$$\left. \cdot w_{\nu}(\tau, \varrho) \sum_{l=1}^p k_l(\tau) z_{r,p-1,i}(\tau, \varrho) u_{r-p}^{(p-1)}(\tau, \varrho) d\tau \right|$$

$$\leq \frac{c_1}{|\varrho|^{n+p}} e^{\Re(\varrho(\omega_{r-p-1} - \omega_{r-p}))x} \int_{-\infty}^x e^{\Re(\varrho(\omega_{r-p} - \omega_{r-p-1}))\tau} \cdot$$

$$\cdot \sum_{l=1}^p |\tau|^{l-1} |\varrho|^{p-1} k_l(\tau) d\tau$$

$$\leq \frac{c_2}{|\varrho|^{n+1}}, \text{ da } \Re(\varrho(\omega_{r-p} - \omega_{r-p-1}))(\tau - x) = 0 \text{ für } x \geq \tau.$$

b) Analog zu a) folgt
$$\left| \frac{I_{r,k,2,1}^2(x,\vartheta)}{u_{r-p}^{(k)}(x,\vartheta)} \right| = O\left(\frac{1}{\vartheta^{n+1}}\right)$$

Mit $I_{r,k,3,1}(x,\vartheta) := \sum_{v=1}^3 I_{r,k,3,v}^v(x,\vartheta)$ folgt

a)
$$\left| \frac{I_{r,k,3,1}^1(x,\vartheta)}{u_{r-p}^{(k)}(x,\vartheta)} \right| = \left| \frac{1}{u_{r-p}^{(k)}(x,\vartheta)} \sum_{j=1}^{k+1} \sum_{\mu=1}^p \frac{(-1)^{p-k+j}}{\vartheta^{n-p}} h_{\mu}^{(k)}(x) \cdot \right.$$

$$\left. \cdot p_{\mu}^{(p-k+j-1)}(x) u_{r-p}^{(n-2p+k-j)}(x,\vartheta) (\vartheta \omega_{r-p})^p \right|$$

$$\leq c_3 \sum_{j=1}^{k+1} \frac{1}{(1+|x|)^j} \frac{1}{|\vartheta|^j} = O\left(\frac{1}{\vartheta}\right).$$

b)
$$\left| \frac{I_{r,k,3,1}^2(x,\vartheta)}{u_{r-p}^{(k)}(x,\vartheta)} \right| = \left| \sum_{j=1}^{k+1} \sum_{\mu=1}^p \frac{h_{\mu}^{(k)}(x) p_{\mu}^{(p-k+j-1)}(x)}{\vartheta^{n-1} u_{r-p}^{(k)}(x,\vartheta)} \right|$$

$$\cdot \int_{-\infty}^x \sum_{v=1}^{r-p-1} u_v^{(n-2p+k-j)}(x,\vartheta) w_v(\tau,\vartheta) \sum_{\ell=1}^p k_{\ell}(\tau) z_{r,p-1,1}(\tau,\vartheta) u_{r-p}^{(p-1)}(\tau,\vartheta) d\tau$$

$$\leq \frac{c_4}{|\vartheta|^{n-1}} \sum_{j=1}^{k+1} \frac{1}{(1+|x|)^j} \int_{-\infty}^x \sum_{\ell=1}^p \frac{k_{\ell}(\tau)}{|\vartheta|^{\ell}} e^{\Re(\vartheta(\omega_{r-p-1}-\omega_{r-p}))(x-\tau)} d\tau$$

$$= O\left(\frac{1}{\vartheta}\right), \text{ da } \Re(\vartheta(\omega_{r-p-1}-\omega_{r-p}))(x-\tau) \leq 0 \text{ f\"ur } x \geq \tau.$$

c) Analog zu b) folgt
$$\frac{I_{r,k,3,1}^3(x,\vartheta)}{u_{r-p}^{(k)}(x,\vartheta)} = O\left(\frac{1}{\vartheta}\right).$$

Mit $I_{r,k,4,i}(x,\vartheta) = \sum_{v=1}^3 I_{r,k,4,i}^v(x,\vartheta)$ folgt

$$a) \left| \frac{I_{r,k,4,i}^1(x,\varrho)}{u_{r-p}^{(k)}(x,\varrho)} \right| = \left| \frac{1}{\varrho^{n-p}} \frac{1}{u_{r-p}^{(k)}(x,\varrho)} \sum_{\mu=1}^p h_{\mu}^{(k)}(x) \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \int_x^{\omega} p_{\mu}^{(p+1)}(t) u_{r-p}^{(n-2p-1)}(t,\varrho) (\varrho \omega_{r-p})^p dt \right|$$

$$\leq \begin{cases} \frac{c_5}{|\varrho|} \int_x^{\omega} e^{-\Re(\varrho \omega_{r-p})(x-t)} \frac{1}{(1+|t|)^2} dt & \text{für } x \in [c, \omega) \\ \frac{c_6}{|\varrho|} \sum_{\mu=1}^p h_{\mu}^{(k)}(x) \int_x^{\omega} e^{-\Re(\varrho \omega_{r-p})(x-t)} \frac{1}{(1+|t|)^2} dt & \text{für } x \in (-\omega, c] \end{cases}$$

$$= \begin{cases} O\left(\frac{1}{\varrho}\right) & \text{für } x \in [c, \omega) \\ O\left(\frac{\sum_{\mu=1}^p h_{\mu}^{(k)}(x)}{\varrho}\right) & \text{für } x \in (-\omega, c], \end{cases}$$

da $-\Re(\varrho \omega_{r-p})(x-t) \leq 0$ für $x \leq t, r-p \leq \omega$.

$$b) \left| \frac{I_{r,k,4,i}^2(x,\varrho)}{u_{r-p}^{(k)}(x,\varrho)} \right| = \left| \sum_{\mu=1}^p \frac{h_{\mu}^{(k)}(x)}{u_{r-p}^{(k)}(x,\varrho) \varrho^{n+1}} \int_x^{\omega} p_{\mu}^{(p+1)}(t) \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \int_t^{\omega} \sum_{v=r-p}^{n-p} u_v^{(n-2p-1)}(t,\varrho) w_v(\tau,\varrho) \sum_{\ell=1}^p k_{\ell}(\tau) z_{r,p-1,i}(\tau,\varrho) d\tau dt \right|$$

$$\leq \frac{c_7}{|\varrho|^{n+1+k}} \int_x^{\omega} \int_t^{\omega} \frac{1}{(1+|t|)^2} \sum_{v=r-p}^{n-p} e^{-\Re(\varrho(\omega_{v-p}-\omega_{r-p}))(t-\tau) + \Re(\varrho \omega_{r-p})(t-x)} \cdot$$

$$\cdot \sum_{\ell=1}^p k_{\ell}(\tau) \frac{1}{|\varrho|^{\ell}} d\tau dt = O\left(\frac{1}{\varrho}\right) \text{ für } x \in [c, \omega)$$

Für $x \in (-\infty, c]$ folgt aus der Abschätzung b)

$$\left| \frac{I_{r,k,4,i}^2(x, \varrho)}{u_{r-p}^{(k)}(x, \varrho)} \right| = O \left(\frac{\sum_{\mu=1}^p h_{\mu}^{(k)}(x)}{\varrho} \right) \quad \text{für } x \in (-\infty, c],$$

da $\Re(\varrho(\omega_{v-p} - \omega_{r-p}))(t-x) \leq 0$ für $t \leq t$ und $v-p \geq r-p$ bzw.

$\Re(\varrho\omega_{r-p})(t-x) \leq 0$ für $x \leq t$ und $r-p \leq x$.

Analog lassen sich die Terme $I_{r,k,4,i}^3(x, \varrho)$, $I_{r,k,5,i}(x, \varrho)$ und $I_{r,k,6,i}(x, \varrho)$ abschätzen.

Ferner gilt

$$\begin{aligned} \left| \frac{I_{r,k,7,i}(x, \varrho)}{u_{r-p}^{(k)}(x, \varrho)} \right| &= \left| \sum_{\mu=1}^p \frac{h_{\mu}^{(k)}(x)}{u_{r-p}^{(k)}(x, \varrho) \varrho^{n+1}} \int_x^{\infty} p_{\mu}(t) \cdot \right. \\ &\quad \cdot \left. \sum_{\ell=1}^p k_{\ell}(t) z_{r,p-1,i}(t, \varrho) u_{r-p}^{(p-1)}(t, \varrho) dt \right| \\ &\leq \left\{ \begin{aligned} &\frac{c_9}{|\varrho|^{n-p+1+k}} \int_x^{\infty} |t|^{p-1-k} \sum_{\ell=1}^p |k_{\ell}(t)| e^{\Re(\varrho\omega_{r-p})(t-x)} \frac{1}{|\varrho|^1} dt \\ &\frac{c_{10}}{|\varrho|^{n-p+1+k}} \sum_{\mu=1}^p |h_{\mu}^{(k)}(x)| \int_x^{\infty} \sum_{\ell=1}^p |k_{\ell}(t)| |t|^{p+1-2} \frac{e^{\Re(\varrho\omega_{r-p})(t-x)}}{|\varrho|^{\ell}} dt \end{aligned} \right. \\ &= \begin{cases} O\left(\frac{1}{\varrho}\right) & \text{für } x \in [c, \infty) \\ O\left(\frac{\sum_{\mu=1}^p h_{\mu}^{(k)}(x)}{\varrho}\right) & \text{für } x \in (-\infty, c], \end{cases} \end{aligned}$$

da $\Re(\varrho\omega_{r-p})(t-x) \leq 0$ für $x \leq t$ und $r-p \leq x$.

Weil sich der durch $R_r^k(x, \zeta)$ gelieferte Term durch die vorhergehenden Terme abschätzen läßt, folgt durch vollständige Induktion, daß die Funktionen $\zeta^{-p+1} y_{r,i}^{(k)}(x, \zeta) = z_{r,k,i}(x, \zeta) u_{r-p}^{(k)}(x, \zeta)$ für $p+1 \leq r \leq p+\infty$, $0 \leq k \leq p-1$ und $i \geq 0$ die Abschätzungen (4.14), ..., (4.16) erfüllen.

Da für ζ aus dem Inneren der Sektoren S_{0k} (insbesondere für $\zeta \in S_{0,k,\varepsilon}$) die Realteile der Exponenten in den e-Funktionen, die Vorfaktoren von Integralen der Gestalt $\int_{-\infty}^x (...) dt$ sind, echt kleiner als Null sind, streben alle soeben abgeschätzten Terme zu Null für $x \rightarrow \infty$, falls ζ aus dem Inneren von S_{0k} ist, und zwar gleichmäßig für alle $\zeta \in S_{0k,\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$. Daher erfüllen die Funktionen $\zeta^{-p+1} y_r^{(k)}(x, \zeta)$ für $p+1 \leq r \leq p+\infty$, $0 \leq k \leq p-1$ und $i \geq 0$ auch (4.13).

Zum Beweis der Abschätzungen (4.13), ..., (4.16) für $k=p, \dots, n-1$ müssen wir zusätzlich zu den in (4.39) aufgeführten und soeben abgeschätzten Termen noch die bei den höheren Ableitungen auftretenden, zu (4.36), S. 38, 39 analogen Terme abschätzen.

Abgesehen von den durch die andere Wahl der Konstanten bedingten ζ -Potenzen besteht der einzige Unterschied zwischen den hier auftretenden Termen und denen in (4.36) darin, daß bei den Integralen von $-\infty$ bis x die Summe über ν von 1 bis $r-p$ läuft und bei den Integralen von x bis ∞ von $r-p$ bis $n-p$.

Da wegen (4.21) die Produkte $h_{\mu}^{(j)}(x) p_{\mu}^{(1)}(x)$ für $j+1 \geq p-1$ gleichmäßig beschränkt sind und für $j+1 \geq p$ für $x \rightarrow \infty$ zu Null streben, erkennt man wie in (4.36) leicht, daß (4.13), ..., (4.16) auch für $k=p, \dots, n-1$ erfüllt sind.

Nun beweisen wir für $p+1 \leq r = p+\infty$ die Konvergenz der sukzessiven Approximation.

Wir setzen

$$m_{\alpha}^i(\zeta) = \max_{0 \leq k \leq p-2} \left(\sup_{x \in (-\infty, x)} (1 + |x|)^{k-p-1} |z_{\alpha,k,i}(x, \zeta) - z_{\alpha,k,i-1}(x, \zeta)| \right),$$

$$m_{\mathfrak{A}2}^i(\varrho) = \max_{p-1 \leq k \leq n-1} \left(\sup_{x \in (-\infty, \infty)} |z_{\mathfrak{A},k,i}(x,\varrho) - z_{\mathfrak{A},k,i-1}(x,\varrho)| \right),$$

$$m_{\mathfrak{A}}^i(\varrho) := \max(m_{\mathfrak{A}1}^i(\varrho), m_{\mathfrak{A}2}^i(\varrho))$$

und

$$m_r^i(\varrho) = \max_{0 \leq k \leq n-1} \left(\sup_{x \in (-\infty, \infty)} |z_{r,k,i}(x,\varrho) - z_{r,k,i-1}(x,\varrho)| \right)$$

für $p+1 \leq r \leq p+\mathfrak{A}-1$.

Die obigen Definitionen sind sinnvoll, da die Funktionen

$$(z_{\mathfrak{A},k,i}(x,\varrho) - z_{\mathfrak{A},k,i-1}(x,\varrho)) (1 + |x|)^{k-p-1} \quad 0 \leq k \leq p-1$$

$$\text{bzw. } (z_{\mathfrak{A},k,i}(x,\varrho) - z_{\mathfrak{A},k,i-1}(x,\varrho)) \quad p-1 \leq k \leq n-1$$

$$\text{und } (z_{r,k,i}(x,\varrho) - z_{r,k,i-1}(x,\varrho)) \quad p+1 \leq r \leq p+\mathfrak{A}-1, 0 \leq k \leq p-2$$

für alle x beschränkt sind.

Aus den vorangegangenen Abschätzungen für die Funktionen $z_{r,k,i}(x,\varrho)$ folgt

$$m_r^{i+1}(\varrho) = O\left(\frac{1}{\varrho}\right) m_r^i(\varrho). \quad p+1 \leq r \leq p+\mathfrak{A}.$$

Nun wählen wir $|\varrho|$ so groß, daß für ein $q < 1$

$$m_r^{i+1}(\varrho) \leq q m_r^i(\varrho) \leq q^i m_r^1(\varrho) \quad p+1 \leq r \leq p+\mathfrak{A}$$

gilt, dann konvergieren die Funktionenfolgen (4.41) und (4.42) gleichmäßig und die durch die Grenzfunktion $z_{r,k}(x,\varrho)$ definierten Funktionen $y_r^{(k)}(x,\varrho)/\varrho^{p-1}$ erfüllen für $p+1 \leq r \leq p+\mathfrak{A}$ (4.13), ..., (4.16).

Analog zum Fall $p+1 \leq r = p+\mathfrak{A}$ erhalten wir die Abschätzungen für den letzten Teil des Fundamentalsystems mit $p+\mathfrak{A}+1 \leq r \leq n$.

Damit ist Lemma 4.1 bewiesen.

Beweis von Satz 4.1 aus Lemma 4.1

Wir gehen nun aus von dem Fundamentalsystem $\{y_1(x, \xi), \dots, y_n(x, \xi)\}$ der Dgl. 4.1 aus Lemma 4.1.

Mit v bezeichnen wir die Wronskideterminante der Funktionen $y_1(x, \xi), \dots, y_n(x, \xi)$ und $v_v(x, \xi)$ sei die Adjunkte von $y_v^{(n-1)}(x, \xi)$ in v .

Behauptung: Die Funktionen $v_v(x, \xi)$ sind Lösungen der zu (4.1) adjungierten Gleichung

$$(4.43) \quad m^*(y) = \lambda n^*(y)$$

mit

$$m^*(y) = (-1)^n y^{(n)} + \sum_{v=2}^n (-1)^{n-v} (f_v(x) y)^{(n-v)}$$

und

$$n^*(y) = (-1)^p y^{(p)} + \sum_{\mu=2}^p (-1)^{p-\mu} (g_\mu(x) y)^{(p-\mu)}.$$

Beweis: Wenn wir mit $a_{\mu j}(x, \xi)$ die Adjunkte von $y_j^{(\mu)}(x, \xi)$ in v bezeichnen, gilt:

$$v_v(x, \xi) = a_{n-1, v}(x, \xi)$$

$$v'_v(x, \xi) = a_{n-2, v}(x, \xi)$$

$$v''_v(x, \xi) = a_{n-3, v}(x, \xi) + b_{n-2, v}(x, \xi).$$

Dabei ist $b_{v j}(x, \xi)$ die Determinante, die man erhält, wenn man in $a_{v j}(x, \xi)$ die Elemente der letzten Zeile einmal differenziert.

$b_{n-2, v}(x, \xi)$ enthält somit in der letzten Zeile die Elemente $y_\mu^{(n)}(x, \xi)$, $\mu \neq v$.

Da $y_\mu(x, \xi)$ eine Lösung der Dgl. $m(y) = \lambda n(y)$ ist, können wir $y_\mu^{(n)}(x, \xi)$ ersetzen durch

$$y_\mu^{(n)}(x, \xi) = - \sum_{j=2}^n f_j(x) y_\mu^{(n-j)}(x, \xi) + \sum_{j=2}^p g_j(x) y_\mu^{(p-j)}(x, \xi) + \lambda y_\mu^{(p)}(x, \xi).$$

Daraus ergibt sich

$$b_{n-2,v}(x,\vartheta) = -f_2(x) a_{n-1,v}(x,\vartheta) = -f_2(x) v_v(x,\vartheta)$$

Also gilt

$$v_v'(x,\vartheta) = a_{n-3,v}(x,\vartheta) - f_2(x) v_v(x,\vartheta).$$

Durch Einsetzen der obigen Beziehung für $y_{\mu}^{(n)}(x,\vartheta)$ in die Gleichung

$$v_v'''(x,\vartheta) = a_{n-4,v}(x,\vartheta) - (f_2(x) v_v(x,\vartheta))' + b_{n-3,v}(x,\vartheta)$$

erhalten wir

$$v_v'''(x,\vartheta) = a_{n-4,v}(x,\vartheta) - (f_2(x) v_v(x,\vartheta))' + f_3(x) v_v(x,\vartheta)$$

Durch weiteres Differenzieren folgt analog

$$(4.44) \quad v_v^{(j)}(x,\vartheta) = a_{n-j-1,v}(x,\vartheta) + \sum_{\mu=2}^j (-1)^{\mu-1} (\tilde{f}_{\mu}(x) v_v(x,\vartheta))^{(j-\mu)}$$

für $2 \leq j \leq n-1$ und $1 \leq v \leq n$ mit

$$\tilde{f}_{\mu}(x) = f_{\mu}(x) \quad \text{für } 2 \leq \mu \leq p-1, \mu = n-p+1,$$

$$\tilde{f}_{n-p}(x) = f_{n-p}(x) - \lambda$$

und

$$\tilde{f}_{\mu}(x) = f_{\mu}(x) - \lambda \varepsilon_{\mu-p}(x) \quad \text{für } n-p+2 \leq \mu \leq n.$$

Ferner gilt

$$(4.45) \quad v_v^{(n)}(x,\vartheta) = \sum_{\mu=2}^n (-1)^{\mu-1} (\tilde{f}_{\mu}(x) v_v(x,\vartheta))^{(n-\mu)}$$

d.h. es gilt

$$m^*(y) = \lambda n^*(y)$$

Damit ist die Zwischenbehauptung bewiesen.

Nun schätzen wir die Funktionen $v_\nu(x, \varrho)$ ab, dabei verwenden wir die Abschätzungen von Lemma 4.1. Bei diesen Abschätzungen müssen wir die Fälle $x \in I_1 = (-\infty, c]$ bzw. $x \in I_2 = [c, \infty)$ getrennt untersuchen.

Es wird sich herausstellen, daß die Funktionen $v_\nu(x, \varrho)$ in I_1 bzw. I_2 die analogen Abschätzungen erfüllen, d.h. die Hauptterme in beiden Intervallen stimmen überein.

Zunächst betrachten wir das Intervall $I_2 = [c, \infty)$, dort gilt wegen der Abschätzungen aus Lemma 4.1:

$$v = \begin{vmatrix} y_1(x, \varrho) & y_2(x, \varrho) & \dots & y_n(x, \varrho) \\ y_1'(x, \varrho) & y_2'(x, \varrho) & \dots & y_n'(x, \varrho) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x, \varrho) & y_2^{(n-1)}(x, \varrho) & \dots & y_n^{(n-1)}(x, \varrho) \end{vmatrix} = (\text{siehe S.54})$$

In die obige Determinante setzen wir die Abschätzungen aus Lemma 4.1 ein. Dann (siehe S.54) subtrahieren wir das $\varphi_\mu^{x+1}(x, \varrho)$ -fache der μ -ten Spalte ($1 \leq \mu \leq p$) von der $(p+x+1)$ -ten Spalte.

Wegen $O(\frac{1}{\lambda}) \varphi_\mu^{x+1}(x, \varrho) = O(e^{\varrho \omega_{x+1} x} / \varrho^{n-p+1})$ bzw. $O(1/\varrho^\alpha) \varphi_\mu^{x+1}(x, \varrho) =$

$O(e^{\varrho \omega_{x+1} x} / \varrho^{\alpha+1})$ können die durch die Subtraktion dieser Nebenterme zu der $(p+x+1)$ -ten Spalte entstehenden Terme mit in den 0-Term von

$e^{\varrho \omega_{x+1} x} (\varrho \omega_{x+1})^k$ in der $(p+x+1)$ -ten Spalte genommen

werden und die Summen in dieser Spalte verschwinden.

Daher gilt mit $[c] := c \{1 + O(\frac{1}{\varrho})\}$

$$\begin{aligned}
 & h_1(x) + o\left(\frac{1}{\lambda}\right) \quad \dots e^{g\omega_1 x} [1] \quad \dots \{e^{g\omega_{2s+1} x} [1] + \sum_{\mu=1}^p h_\mu(x) \psi_\mu(x, \varrho)\} \dots e^{g\omega_{n-p} x} [1] \\
 & \vdots \\
 & h_1^{(p)}(x) + o\left(\frac{1}{\lambda}\right) \quad \dots e^{g\omega_1 x} [g\omega_1] \quad \dots \{e^{g\omega_{2s+1} x} [g\omega_{2s+1}] + \sum_{\mu=1}^p h_\mu(x) \psi_\mu(x, \varrho)\} \dots e^{g\omega_{n-p} x} [g\omega_{n-p}] \\
 & \vdots \\
 & h_1^{(p+1)}(x) + o\left(\frac{1}{\varrho^{n-p-1}}\right) \dots e^{g\omega_1 x} [g\omega_1] \quad \dots \{e^{g\omega_{2s+1} x} [g\omega_{2s+1}] + \sum_{\mu=1}^p h_\mu(x) \psi_\mu(x, \varrho)\} \dots e^{g\omega_{n-p} x} [g\omega_{n-p}] \\
 & \vdots \\
 & h_1^{(n-1)}(x) + o\left(\frac{1}{\varrho}\right) \quad \dots e^{g\omega_1 x} [g\omega_1] \quad \dots \{e^{g\omega_{2s+1} x} [g\omega_{2s+1}] + \sum_{\mu=1}^p h_\mu(x) \psi_\mu(x, \varrho)\} \dots e^{g\omega_{n-p} x} [g\omega_{n-p}]
 \end{aligned}$$

$\nabla =$

$$\begin{aligned}
 & h_1(x) + o\left(\frac{1}{\lambda}\right) \quad \dots h_p(x) + o\left(\frac{1}{\lambda}\right) \quad \dots e^{g\omega_1 x} [1] \quad \dots e^{g\omega_{n-p} x} [1] \\
 & \vdots \\
 & h_1^{(p)}(x) + o\left(\frac{1}{\lambda}\right) \quad \dots h_p^{(p)}(x) + o\left(\frac{1}{\lambda}\right) \quad \dots e^{g\omega_1 x} [g\omega_1] \quad \dots e^{g\omega_{n-p} x} [g\omega_{n-p}] \\
 & \vdots \\
 & h_1^{(p+1)}(x) + o\left(\frac{1}{\varrho^{n-p-1}}\right) \quad \dots h_p^{(p+1)}(x) + o\left(\frac{1}{\varrho^{n-p-1}}\right) \quad \dots e^{g\omega_1 x} [g\omega_1] \quad \dots e^{g\omega_{n-p} x} [g\omega_{n-p}] \\
 & \vdots \\
 & h_1^{(n-1)}(x) + o\left(\frac{1}{\varrho}\right) \quad \dots h_p^{(n-1)}(x) + o\left(\frac{1}{\varrho}\right) \quad \dots e^{g\omega_1 x} [g\omega_1] \quad \dots e^{g\omega_{n-p} x} [g\omega_{n-p}]
 \end{aligned}$$

$=$

Aufgrund der Abschätzungen für die Funktionen $h_{\mu}^{(j)}(x)$ ist der Hauptterm von v das Produkt aus der Determinante der p ersten Zeilen und Spalten von v und der zugehörigen Adjunkte, d.h. es gilt

$$v = d_1 \cdot d_2 [1]$$

mit

$$d_1 = \begin{vmatrix} h_1(x) & h_2(x) & \dots & h_p(x) \\ h'_1(x) & h'_2(x) & \dots & h'_p(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ h^{(p-1)}_1(x) & h^{(p-1)}_2(x) & \dots & h^{(p-1)}_p(x) \end{vmatrix} = 0$$

und

$$d_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \omega_1 & \omega_2 & \dots & \omega_{n-p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \omega^{n-p-1}_1 & \omega^{n-p-1}_2 & \dots & \omega^{n-p-1}_{n-p} \end{vmatrix}$$

Da wir für $v=p+1, p+2, \dots, n$ in $v_v(x, \xi)$ die analogen Umformungen wie in v durchführen können, gilt

$$v_v(x, \xi) = d_1 d_2 [1]$$

mit

$$d_{2v} = (-1)^{n-v} \frac{1}{\omega_{v-p}^p \xi^{n-1}} e^{-\xi \omega_{v-p} x} \quad c_v := K_v(\xi) \frac{1}{d_1} e^{-\xi \omega_{v-p} x}$$

dabei ist c_v die Adjunkte von ω_{v-p}^{n-p-1} in d_2 .

Aus (4.44) folgt für $2 \leq j \leq n-p-1$

$$(4.47) \quad v_v^{(j)}(x, \xi) = \sum_{\mu=2}^j (-1)^{\mu-1} (f_\mu(x) v_v(x, \xi))^{(j-\mu)} + a_{n-j-1, v}(x, \xi)$$

Für $1 \leq j \leq n-p-1$ folgt aus den vorhergehenden Überlegungen

$$(4.48) \quad \frac{a_{n-j, v}(x, \xi)}{v_v(x, \xi)} = \frac{a_{n-j, v}(x, \xi)}{a_{n-1, v}(x, \xi)} = \frac{\beta_{vj}}{\beta_{v1}} \xi^{j-1} [1],$$

dabei ist $(-1)^{v+n-p+1-j} \beta_{vj}$ die Adjunkte von ω_{v-p}^{n-p-j} in der Determinante d_2 . Wegen

$$(4.49) \quad \frac{\beta_{vj}}{\beta_{v1}} = (-1)^{j-1} \omega_{v-p}^{j-1} \quad p+1 \leq v \leq n, 1 \leq j \leq n-p-1$$

(siehe Lemma 7.1) folgt wegen der Beschränktheit der Funktionen $f_\mu^{(j)}(x)$, $0 \leq j \leq n-p-2$, $2 \leq \mu \leq n-p-1$, aus (4.46), ..., (4.49) durch Induktion

$$(4.50) \quad v_v^{(j)}(x, \xi) = (-\xi \omega_{v-p})^j v_v(x, \xi) [1] \quad p+1 \leq v \leq n, 0 \leq j \leq n-p-1.$$

Für die $(n-p)$ -te Ableitung gilt wegen (4.44)

$$v_v^{(n-p)}(x, \xi) = a_{p, v}(x, \xi) + \sum_{\mu=2}^{n-p} (-1)^{\mu-1} (f_\mu(x) v_v(x, \xi))^{(n-p-\mu)} + (-1)^{n-p} \lambda v_v(x, \xi)$$

Wegen $\lambda = \xi^{n-p}$ und $\omega_v^{n-p} = 1$ gilt

$(-1)^{n-p} \lambda_{v_v}(x, \xi) = (-\xi \omega_{v-p})^{n-p} v_v(x, \xi)$, die Terme in der Summe verhalten sich wie $O(v_v \xi^{n-p-2})$ und für den Term $a_{p,v}(x, \xi)$ gilt

$$\frac{a_{p,v}}{\varepsilon_{p+1,v}} = O\left(\frac{a_{p,v}(x, \xi)}{v_v^{(n-p-1)}(x, \xi)}\right) = O\left(\frac{\tilde{d}_1}{d_1}\right)$$

Dabei ist $\tilde{d}_1$ die Determinante, die aus d_1 entsteht, wenn man in d_1 die Elemente der letzten Zeile einmal differenziert. Aufgrund der Abschätzungen für die Funktionen $h_{\mu}^{(j)}(x)$ gilt

$$\frac{\tilde{d}_1}{d_1} = O\left(\frac{1}{1+|x|}\right),$$

daraus folgt

$$a_{p,v}(x, \xi) = O(v_v^{(n-p-1)}(x, \xi)) = O(v_v(x, \xi) \xi^{n-p-1}),$$

und wir erhalten

$$(4.51) \quad v_v^{(n-p)}(x, \xi) = (-\xi \omega_{v-p})^{n-p} v_v(x, \xi) [1].$$

Aus (4.50) und (4.51) folgt durch weiteres Differenzieren und durch Induktion

$$(4.52) \quad v_v^{(j)}(x, \xi) = (-\xi \omega_{v-p})^j v_v(x, \xi) [1] \quad p+1 \leq v \leq n, n-p+1 \leq j \leq n-1$$

und zwar gleichmäßig bzgl. $x \in [c, \infty)$ und $\xi \in S_{0k}$, $|\xi| > |\xi_0|$.

Dabei werden analoge Abschätzungen zum Fall $j \leq n-p$ verwandt.

Die Funktionen $v_{\nu}^{(j)}(x, \xi)/K_{\nu}(\xi)$ erfüllen somit für $0 \leq j \leq n-1$ und $p+1 \leq \nu \leq n$ die Abschätzungen

$$(4.53) \quad v_{\nu}^{(j)}(x, \xi)/K_{\nu}(\xi) = (-\xi \omega_{\nu-p})^j e^{-\xi \omega_{\nu-p} x} [1]$$

und zwar gleichmäßig bzgl. $x \in [c, \infty)$ und $\xi \in S_{0k}, |\xi| > |\xi_0|$.

Im Intervall $(-\infty, c]$ lassen sich die analogen Überlegungen durchführen wie im Intervall $[c, \infty)$. Dort muß man bei der Abschätzung von v bzw. v_{ν} geeignete Vielfache der p ersten Spalten zu der $(p+1)$ -ten Spalte addieren, alle weiteren Überlegungen verlaufen analog zum obigen Fall.

Wir erhalten schließlich für $p+1 \leq \nu \leq n$ und $0 \leq j \leq n-1$

$$(4.54) \quad v_{\nu}^{(j)}(x, \xi)/K_{\nu}(\xi) = (-\xi \omega_{\nu-p})^j e^{-\xi \omega_{\nu-p} x} [1]$$

und zwar gleichmäßig bzgl. $\xi \in S_{0k}, |\xi| > |\xi_0|$ und $x \in (-\infty, c]$ bzw. mit (4.53) $x \in (-\infty, \infty)$.

Analog zu Lemma 4.1 können wir nun p Lösungen $\hat{h}_{\nu}(x, \xi)$, $1 \leq \nu \leq p$, der Dgl. $m^*(y) = \lambda n^*(y)$ konstruieren, für die gilt:

$$(4.55) \quad \left. \begin{aligned} \hat{h}_{\nu}^{(k)}(x, \xi) &= \tilde{h}_{\nu}^{(k)}(x) + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) & 0 \leq k \leq p \\ \hat{h}_{\nu}^{(k)}(x, \xi) &= \tilde{h}_{\nu}^{(k)}(x) + O\left(\frac{1}{\xi^{n-k}}\right) & p+1 \leq k \leq n-1 \end{aligned} \right\} 1 \leq \nu \leq p$$

gleichmäßig für $x \in [c, \infty)$ und $\xi \in S_{0k}, |\xi| > |\xi_0|$.

Für $x \in (-\infty, c]$ und $\xi \in S_{0k}, |\xi| > |\xi_0|$, gilt gleichmäßig bzgl. x und ξ :

$$(4.56) \quad \hat{h}_\nu^{(k)}(x, \xi) = \tilde{h}_\nu^{(k)}(x) + \begin{cases} \sum_{\mu=1}^p \tilde{h}_\mu^{(k)}(x) \varphi_\mu(x, \xi) + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) & 0 \leq k \leq p \\ \sum_{\mu=1}^p \tilde{h}_\mu^{(k)}(x) \hat{\varphi}_\mu(x, \xi) + O\left(\frac{1}{\xi^{n-k}}\right) & p+1 \leq k \leq n-1 \end{cases}$$

$1 \leq \nu \leq p$.

Dabei sei $\{\tilde{h}_1(x), \dots, \tilde{h}_p(x)\}$ ein Fundamentalsystem der Dgl. $n^*(y) = 0$, welches die Abschätzungen von Satz 3.1 erfüllt, und es gelte:

$$\varphi_\mu(x, \xi) = O\left(\frac{1}{\xi^{n-p}}\right) \quad \text{für } 1 \leq \mu \leq p, x \in (-\infty, c], \xi \in S_{0k} \text{ mit } |\xi| > |\xi_0|.$$

Behauptung: Die Funktionen $\{\hat{h}_1(x, \xi), \dots, \hat{h}_p(x, \xi), v_{p+1}(x, \xi)/K_{p+1}(\xi), \dots, v_n(x, \xi)/K_n(\xi)\}$ bilden ein Fundamentalsystem der Dgl. $m^*(y) = \lambda n^*(y)$, welches den Abschätzungen (4.54), ..., (4.56) genügt.

Beweis: Aus den asymptotischen Abschätzungen (4.54), ..., (4.56) folgt für die Wronskideterminante der obigen Funktionen

$$\begin{vmatrix} \hat{h}_1(x, \xi) & \dots & \hat{h}_p(x, \xi) & \frac{v_{p+1}(x, \xi)}{K_{p+1}(\xi)} & \dots & \frac{v_n(x, \xi)}{K_n(\xi)} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \hat{h}_1^{(n-1)}(x, \xi) & \dots & \hat{h}_p^{(n-1)}(x, \xi) & \frac{v_{p+1}^{(n-1)}(x, \xi)}{K_{p+1}(\xi)} & \dots & \frac{v_n^{(n-1)}(x, \xi)}{K_n(\xi)} \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} \tilde{h}_1(x) & \dots & \tilde{h}_p(x) & \frac{v_{p+1}^{(p)}(x, \xi)}{K_{p+1}(\xi)} & \dots & \frac{v_n^{(p)}(x, \xi)}{K_n(\xi)} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \tilde{h}_1^{(p-1)}(x) & \dots & \tilde{h}_p^{(p-1)}(x) & \frac{v_{p+1}^{(n-1)}(x, \xi)}{K_{p+1}(\xi)} & \dots & \frac{v_n^{(n-1)}(x, \xi)}{K_n(\xi)} \end{vmatrix} \quad [1] =$$

$$= \begin{vmatrix} \tilde{h}_1(x) & \dots & \tilde{h}_p(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \tilde{h}_1^{(p-1)}(x) & \dots & \tilde{h}_p^{(p-1)}(x) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \omega_1 & \dots & \omega_{n-p} \\ \vdots & & \vdots \\ \omega_1^{n-p-1} & \dots & \omega_{n-p}^{n-p-1} \end{vmatrix} \quad \sum_{j=p}^{n-1} j \quad [\pm 1]$$

$\neq 0$ für $|g| > |g_0|$, da die Funktionen $\tilde{h}_1(x), \dots, \tilde{h}_p(x)$ nach Voraussetzung ein Fundamentalsystem der Dgl. $n^*(y)=0$ bilden. Daher sind die Funktionen $\hat{h}_1(x, g), \dots, \hat{h}_p(x, g), v_{p+1}(x, g)/K_{p+1}(g), \dots, v_n(x, g)/K_n(g)$ linear unabhängig und die Zwischenbehauptung ist bewiesen. Bezüglich $x \rightarrow \infty$ erfüllen die obigen Funktionen offenbar die zu (4.12) und (4.13) analogen Abschätzungen.

Ganz analog zum obigen Beweis läßt sich nun für die zu $m^*(y) = \lambda n^*(y)$ adjungierte Gleichung (4.1) ein Fundamentalsystem angeben, welches die zu (4.54), ..., (4.56) analogen Abschätzungen (4.9), ..., (4.13) erfüllt. Damit ist Satz 4.1 bewiesen.

§5 Abschätzung der Greenschen Funktion

a) $I = [0, a], a > 0$.

Wir betrachten das Randwertproblem, das erzeugt wird von dem Differentialausdruck

$$(5.1) \quad m(y) = \lambda n(y)$$

und den Randbedingungen

$$(5.2) \quad U_v^a(y) = U_{v0}(y) + U_{va}(y) = 0, \quad 1 \leq v \leq n.$$

Die Differentialausdrücke $m(y)$ und $n(y)$ sollen dabei die Gestalt (4.2), (4.3) haben und die Koeffizientenfunktionen von $m(y)$ und $n(y)$ sollen die Bedingungen (4.4), ..., (4.7) erfüllen.

Die Randbedingungen seien o.B.d.A. in der normierten Form gegeben, d.h. es sei für $1 \leq v \leq n$

$$(5.3) \quad U_{v0}(y) = a_v y^{(k_v)}(0) + \sum_{j=1}^{k_v-1} a_{vj} y^{(j)}(0)$$

$$U_{va}(y) = b_v y^{(k_v)}(a) + \sum_{j=1}^{k_v-1} b_{vj} y^{(j)}(a)$$

mit $n-1 \geq k_1 \geq \dots \geq k_n; k_{v+2} > k_v; |a_v|^2 + |b_v|^2 > 0; |a_{v\tau_v}| > 0; |b_{v\eta_v}| > 0$.

Zur Herleitung von asymptotischen Abschätzungen für die Greensche Funktion von Problemen der Gestalt (5.1), (5.2) machen wir die folgende Voraussetzung:

V_1 : Es sei $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ eine Permutation der Zahlen $1, 2, \dots, n$, so daß gilt

(i) Entweder ist $\eta_{x_i} \geq p-1$ für $1 \leq i \leq n$,

(ii) oder es ist

$$\eta_{\alpha_1} < \eta_{\alpha_2} < \dots < \eta_{\alpha_p} < p-1 \leq \eta_{\alpha_{p+1}} \leq \dots \leq \eta_{\alpha_n}.$$

Im Falle (i) fordern wir: Die Randbedingungen (5.2) seien für beliebiges $a \in \mathbb{R}, a \geq a_0$, im Sinne von [7b], Seite 16, N-regulär, und zwar sei die dort definierte Zahl D_0 für alle $a \geq a_0$ dem Betrage nach größer als eine feste Konstante D .

Im Falle (ii) setzen wir

$$I := \max \{j \mid p-j-\eta_{\alpha_j} \geq 0\}$$

Mit

$$I_1 := \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_1\}$$

$$I_2 := \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{p-1}\}$$

und

$$I_3 := \{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{n-p}\}$$

bezeichnen wir die Menge der Indizes, für die folgendes gilt

$$k_p \leq k_j \quad \text{für alle } p \in I_2 \text{ und } j \in I_3,$$

$$k_{\beta_v} \geq k_{\beta_j} \quad \text{für } v < j \quad \text{und } k_{\gamma_v} \geq k_{\gamma_j} \quad \text{für } v < j.$$

Ferner bezeichnen wir mit A_1 die durch

$$A_1 := \begin{vmatrix} \binom{p-1}{\eta_{\alpha_1}} & \dots & \binom{p-1}{\eta_{\alpha_1}} \\ \vdots & & \vdots \\ \binom{p-1}{\eta_{\alpha_1}} & \dots & \binom{p-1}{\eta_{\alpha_1}} \end{vmatrix} \eta_{\alpha_1}! \dots \eta_{\alpha_1}! b_{\alpha_1} \eta_{\alpha_1} \dots b_{\alpha_1} \eta_{\alpha_1}$$

bestimmte Konstante, die wegen (ii) von Null verschieden ist.

Für die durch

$$D_1^a := \begin{vmatrix} U_{\beta_1}^a(h_1) & \dots & U_{\beta_1}^a(h_{p-1}) \\ \vdots & & \vdots \\ U_{\beta_{p-1}}^a(h_1) & \dots & U_{\beta_{p-1}}^a(h_{p-1}) \end{vmatrix}$$

bestimmten Zahlen D_1^a fordern wir

(ii₁) $|D_1^a| \geq D > 0$ für alle $a \geq a_0$.

Wir setzen hier $k_{\gamma_{n-p}} > k_{\beta_1}$ voraus und fordern

(ii₂) a) Falls $n-p$ ungerade ist, $n-p=2\ell-1$, seien die durch die Identität

$$\Theta_0 + \Theta_1 s =$$

$$\begin{vmatrix} a_{\gamma_1} \omega_{\gamma_1}^{k_{\gamma_1}} & \dots & a_{\gamma_1} \omega_{\gamma_1}^{k_{\gamma_1}} & (a_{\gamma_1} + s b_{\gamma_1}) \omega_{\gamma_1}^{k_{\gamma_1}} & b_{\gamma_1} \omega_{\gamma_1}^{k_{\gamma_1}} & \dots & b_{\gamma_1} \omega_{\gamma_1}^{k_{\gamma_1}} \\ a_{\gamma_2} \omega_{\gamma_2}^{k_{\gamma_2}} & \dots & a_{\gamma_2} \omega_{\gamma_2}^{k_{\gamma_2}} & (a_{\gamma_2} + s b_{\gamma_2}) \omega_{\gamma_2}^{k_{\gamma_2}} & b_{\gamma_2} \omega_{\gamma_2}^{k_{\gamma_2}} & \dots & b_{\gamma_2} \omega_{\gamma_2}^{k_{\gamma_2}} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{\gamma_{n-p}} \omega_{\gamma_{n-p}}^{k_{\gamma_{n-p}}} & \dots & a_{\gamma_{n-p}} \omega_{\gamma_{n-p}}^{k_{\gamma_{n-p}}} & (a_{\gamma_{n-p}} + s b_{\gamma_{n-p}}) \omega_{\gamma_{n-p}}^{k_{\gamma_{n-p}}} & b_{\gamma_{n-p}} \omega_{\gamma_{n-p}}^{k_{\gamma_{n-p}}} & \dots & b_{\gamma_{n-p}} \omega_{\gamma_{n-p}}^{k_{\gamma_{n-p}}} \end{vmatrix}$$

definierten Zahlen Θ_0 und Θ_1 von Null verschieden.

b) Falls $n-p$ gerade ist, $n-p=2\ell$, seien die durch die Identität

$$\Theta_{-1} s^{-1} + \Theta_0 + \Theta_1 s =$$

$$\begin{vmatrix}
 a_{\gamma_1}^{\kappa_{\gamma_1}} \omega_{\gamma_1}^{\kappa_{\gamma_1}} & \dots & a_{\gamma_{n-p}}^{\kappa_{\gamma_{n-p}}} \omega_{\gamma_{n-p}}^{\kappa_{\gamma_{n-p}}} & (a_{\gamma_1} + s b_{\gamma_1}) \omega_{\gamma_1}^{\kappa_{\gamma_1}} & (a_{\gamma_1} + \frac{1}{s} b_{\gamma_1}) \omega_{\gamma_1}^{\kappa_{\gamma_1}} & b_{\gamma_1} \omega_{\gamma_1}^{\kappa_{\gamma_1}} & \dots & b_{\gamma_{n-p}} \omega_{\gamma_{n-p}}^{\kappa_{\gamma_{n-p}}} \\
 a_{\gamma_2}^{\kappa_{\gamma_2}} \omega_{\gamma_2}^{\kappa_{\gamma_2}} & \dots & a_{\gamma_{n-p}}^{\kappa_{\gamma_{n-p}}} \omega_{\gamma_{n-p}}^{\kappa_{\gamma_{n-p}}} & (a_{\gamma_2} + s b_{\gamma_2}) \omega_{\gamma_2}^{\kappa_{\gamma_2}} & (a_{\gamma_2} + \frac{1}{s} b_{\gamma_2}) \omega_{\gamma_2}^{\kappa_{\gamma_2}} & b_{\gamma_2} \omega_{\gamma_2}^{\kappa_{\gamma_2}} & \dots & b_{\gamma_{n-p}} \omega_{\gamma_{n-p}}^{\kappa_{\gamma_{n-p}}} \\
 \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
 a_{\gamma_{n-p}}^{\kappa_{\gamma_{n-p}}} \omega_{\gamma_{n-p}}^{\kappa_{\gamma_{n-p}}} & \dots & a_{\gamma_{n-p}}^{\kappa_{\gamma_{n-p}}} \omega_{\gamma_{n-p}}^{\kappa_{\gamma_{n-p}}} & (a_{\gamma_{n-p}} + s b_{\gamma_{n-p}}) \omega_{\gamma_{n-p}}^{\kappa_{\gamma_{n-p}}} & (a_{\gamma_{n-p}} + \frac{1}{s} b_{\gamma_{n-p}}) \omega_{\gamma_{n-p}}^{\kappa_{\gamma_{n-p}}} & b_{\gamma_{n-p}} \omega_{\gamma_{n-p}}^{\kappa_{\gamma_{n-p}}} & \dots & b_{\gamma_{n-p}} \omega_{\gamma_{n-p}}^{\kappa_{\gamma_{n-p}}}
 \end{vmatrix}$$

definierten Zahlen Θ_{-1} und Θ_1 von Null verschieden.

Bemerkung: Falls $\kappa_{\gamma_{n-p}} = \kappa_{\beta_1}$ ist, müssen wir die obigen

Bedingungen entsprechend zu dem Fall $\kappa_{n-p+1} = \kappa_{n-p}$ in [7a], Seite 200, abändern.

Die Ergebnisse, die wir erhalten werden, sind in beiden Fällen analog zueinander.

Ende von Voraussetzung V_1 .

Zur Abschätzung der Greenschen Funktion $G_a(x, \xi, \zeta)$ des Problems (5.1), (5.2) verwenden wir das Fundamentalsystem $\{y_1(x, \zeta), \dots, y_n(x, \zeta)\}$ aus Satz 4.2 und die Darstellung

$$(5.4) \quad G_a(x, \xi, \zeta) = g_a(x, \xi, \zeta) - \sum_{j=1}^n \sum_{v=1}^n y_j(x, \zeta) \frac{v^a_{jv}}{\Delta_a(\zeta)} U_v^a(g)$$

mit

$$g_a(x, \xi, \zeta) = \begin{cases} + \frac{1}{2w} \sum_{v=1}^n y_v(x, \zeta) w_v(\xi, \zeta) & \text{für } x > \xi \\ - \frac{1}{2w} \sum_{v=1}^n y_v(x, \zeta) w_v(\xi, \zeta) & \text{für } x < \xi \end{cases}$$

Dabei ist w die Wronskideterminante der Funktionen $y_1(x, \zeta), \dots, y_n(x, \zeta), w_v(x, \zeta), 1 \leq v \leq n$, sind die Adjunkten der Funktionen $y_v^{(n-1)}(x, \zeta)$ in der Wronskimatrix dieser Funktionen, $\Delta_a(\zeta)$ ist die charakteristische Determinante in Bezug auf das obige Fundamentalsystem und $v^a_{jv}, 1 \leq j, v \leq n$, seien die Adjunkten der Elemente $U_v^a(y_j)$ in $\Delta_a(\zeta)$.

Die Gleichung (5.4) formen wir nun um und beachten dabei

$$(5.5) \sum_{v=1}^n \frac{v^a}{\Delta_q(\varrho)} U_v^a(y_k) = \delta_{jk}, \quad 1 \leq j, k \leq n.$$

Damit erhalten wir für die Greensche Funktion $G_a(x, \xi, \varrho)$ und ihre Ableitungen nach x und ξ bis zur Ordnung $n-1$ die Darstellung (siehe [7b], S.20)

$$(5.6) \frac{\partial^k}{\partial \xi^k} \frac{\partial^l}{\partial x^l} G_a(x, \xi, \varrho) = \begin{cases} \sum_{j=p+1}^{p+\alpha} y_j^{(1)}(x, \varrho) \frac{w_j^{(k)}(\xi, \varrho)}{w} & x > \xi \\ - \left(\sum_{j=1}^p + \sum_{j=p+\alpha+1}^n \right) y_j^{(1)}(x, \varrho) \frac{w_j^{(k)}(\xi, \varrho)}{w} + \sum_{\alpha=1}^{12} R_{kl}^{(\alpha)}(x, \xi, \varrho) & x < \xi \end{cases}$$

mit (5.7):

$$R_{kl}^{a(1)} = \sum_{j=1}^{p-l} \sum_{i=1}^p S_{j i k l}^0(x, \xi, \varrho)$$

$$R_{kl}^{a(2)} = \sum_{j=p-l+1}^p \sum_{i=1}^p S_{j i k l}^0(x, \xi, \varrho)$$

$$R_{kl}^{a(3)} = \sum_{j=p+1}^{p+\alpha} \sum_{i=1}^p S_{j i k l}^0(x, \xi, \varrho)$$

$$R_{kl}^{a(4)} = \sum_{j=p+\alpha+1}^n \sum_{i=1}^p S_{j i k l}^0(x, \xi, \varrho)$$

$$R_{kl}^{a(5)} = \sum_{j=1}^{p-l} \sum_{i=p+1}^{p+\alpha} S_{j i k l}^a(x, \xi, \varrho)$$

$$R_{kl}^{a(6)} = \sum_{j=p-l+1}^p \sum_{i=p+1}^{p+\alpha} S_{j i k l}^a(x, \xi, \varrho)$$

$$R_{kl}^{a(7)} = \sum_{j=p+1}^{p+\alpha} \sum_{i=p+1}^{p+\alpha} S_{j i k l}^a(x, \xi, \varrho)$$

$$R_{kl}^a(8) = \sum_{j=p+2\ell+1}^n \sum_{i=p+1}^{p+2\ell} S_{jikl}^a(x, \xi, \zeta)$$

$$R_{kl}^a(9) = \sum_{j=1}^{p-\ell} \sum_{i=p+2\ell+1}^n S_{jikl}^0(x, \xi, \zeta)$$

$$R_{kl}^a(10) = \sum_{j=p-\ell+1}^p \sum_{i=p+2\ell+1}^n S_{jikl}^0(x, \xi, \zeta)$$

$$R_{kl}^a(11) = \sum_{j=p+1}^{p+2\ell} \sum_{i=p+2\ell+1}^n S_{jikl}^0(x, \xi, \zeta)$$

$$R_{kl}^a(12) = \sum_{j=p+2\ell+1}^n \sum_{i=p+2\ell+1}^n S_{jikl}^0(x, \xi, \zeta)$$

und

$$S_{jikl}^{(\beta)}(x, \xi, \zeta) = \frac{\partial^k}{\partial \xi^k} \frac{\partial^l}{\partial x^l} \sum_{v=1}^n y_j(x, \zeta) \frac{v_{jv}^a}{\Delta_a(\zeta)} U_{v\beta}(y_i) \frac{w_i(\xi, \zeta)}{w}$$

für $\beta=0, a$.

Wir beschränken uns hier auf den Fall $n-p=2\ell=4\eta, k_{\gamma_{n-p}} > k_{\beta_1}$, alle übrigen Fälle können analog behandelt werden, und betrachten einen festen Sektor S_{α_k} der komplexen ζ -Ebene, für den

$$\Re(\zeta \omega_1) \leq \dots \leq \Re(\zeta \omega_{2\ell}) \leq 0 \leq \Re(\zeta \omega_{2\ell+1}) \leq \dots \leq \Re(\zeta \omega_{n-p})$$

gilt.

Zur Abschätzung der Greenschen Funktion betrachten wir nun die einzelnen in ihr vorkommenden Terme:

Die Funktionen $y_j(x, \zeta)$ erfüllen die Abschätzungen von Satz 4.2.

Die Funktionen $w_1(\xi, \zeta), \dots, w_n(\xi, \zeta)$ bilden ein Fundamentalsystem der zu (5.1) adjungierten Gleichung $m^*(y) = \lambda n^*(y)$ und erfüllen samt ihren Ableitungen bis zur $(n-1)$ -ten Ordnung gleichmäßig bzgl. $\zeta \in S_{\alpha_k}, |\zeta| > |\zeta_0|$, und $\xi \in [\varrho, \infty)$ die Abschätzung (siehe Lemma 7.4)

$$(5.8) \quad \frac{d^1}{df^1} \frac{w_v(\xi, \varepsilon)}{w} = \begin{cases} \frac{1}{\lambda} \frac{d^1}{d\xi^1} h^*(\xi) [1] & v=1, \dots, p \\ \frac{(-1)^1}{n-p} \frac{\omega_{v-p}^{1+1-p}}{g^{n-1-1}} e^{-g\omega_{v-p}\xi} [1] & v=p+1, \dots, n \end{cases}$$

$$0 \leq 1 \leq n-1.$$

Dabei stellt $\{h_1^*(\xi), \dots, h_p^*(\xi)\}$ ein Fundamentalsystem der zu $n(y)=0$ adjungierten Gleichung $n^*(y)=0$ dar, die Funktionen $h_v^*(\xi)$ erfüllen samt ihren Ableitungen bzgl. ξ die gleichen Abschätzungen wie die Funktionen $p_v(\xi)$ (siehe (4.20) und (4.21)).

Aus den Randbedingungen folgt mit Satz 4.2 für $1 \leq v \leq n$

$$U_{v0}(y_j) = 0(1) \quad 1 \leq j \leq p$$

$$(5.9) \quad U_{v0}(y_j) = (g\omega_{j-p})^{k_v} a_v [1] \quad p+\kappa+1 \leq j \leq n$$

$$U_{va}(y_j) = (g\omega_{j-p})^{k_v} b_v e^{g\omega_{j-p}a} [1] \quad p+1 \leq j \leq p+\kappa$$

Wir setzen nun $J_1 = \{1, 2, \dots, p-1\}$, $J_2 = \{p-1+1, \dots, p\}$, $J_3 = \{p+1, \dots, p+\kappa\}$ und $J_4 = \{p+\kappa+1, \dots, n\}$, dann folgt für die charakteristische Determinante aus den bisherigen Abschätzungen

$$(5.10) \quad \Delta_a(g) = A_1 D_1^a e^{g\omega_{\kappa+1}a} \dots e^{g\omega_{n-p}a} \sum_{j=1}^{\ell} p-j-\eta_{\alpha_j} \\ g^{k_{\gamma_1} + \dots + k_{\gamma_{n-p}}} [\Theta_{-1} + \Theta_0 e^{g\omega_{\kappa}a} + \Theta_1 e^{2g\omega_{\kappa}a}]$$

und für die Terme $\frac{v^a}{\Delta_a(g)}$ bekommen wir in den Bereichen, wo

$|\Theta_{-1} + \Theta_0 e^{g\omega x^a} + \Theta_1 e^{2g\omega x^a}| \geq \delta > 0$ gilt, die Abschätzungen

$$(5.11) \quad \frac{v_j^a}{\Delta_2(g)} =$$

$$\left. \begin{array}{l} O(1/a^{\delta_v} g^{\varepsilon_1}) \\ O(1) \\ O(1/g^{k_v - k_{\beta_1}}) \end{array} \right\} \begin{array}{l} v \in I_1 \\ v \in I_2 \\ v \in I_3 \end{array} \quad j \in J_1$$

$$\left. \begin{array}{l} O(1/a^{j-1-\eta_v}) \\ O(1/a^{j-p+1}) \\ O(1/a^{j-p+1} g^{k_v - k_{\beta_1}}) \end{array} \right\} \begin{array}{l} v \in I_1 \\ v \in I_2 \\ v \in I_3 \end{array} \quad j \in J_2$$

$$\left. \begin{array}{l} O(1/a^{\delta_v} g^{\varepsilon_2}) \\ O(1/g^{k_{\gamma_n - p}}) \\ O(1/g^{k_v}) \end{array} \right\} \begin{array}{l} v \in I_1 \\ v \in I_2 \\ v \in I_3 \end{array} \quad j \in J_3$$

$$\left. \begin{array}{l} O(e^{-g\omega_{j-p}^a/a^{\delta_v} g^{\varepsilon_2}}) \\ O(e^{-g\omega_{j-p}^a/g^{k_{\gamma_n - p}}}) \\ O(e^{-g\omega_{j-p}^a/g^{k_v}}) \end{array} \right\} \begin{array}{l} v \in I_1 \\ v \in I_2 \\ v \in I_3 \end{array} \quad j \in J_4$$

mit

$$(5.12) \quad \delta_v = -\eta_v + \begin{cases} p-1 & \text{für } p-1 \leq \eta_{\alpha_{\ell+1}} \\ \eta_{\alpha_{\ell+1}} & \text{für } p-1 > \eta_{\alpha_{\ell+1}} \end{cases}$$

$$\varepsilon_1 = \begin{cases} k_{\gamma_{1+1}} - k_{\beta_1} & \text{für } p-1 < \eta_{\alpha_{1+1}} \text{ und } \alpha_{1+1} \in I_3 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\text{und} \quad \epsilon_2 = \begin{cases} k_{\alpha_{1+1}} & \text{für } p-1 < \eta_{\alpha_{1+1}} \text{ und } \alpha_{1+1} \in I_3 \\ k_{\gamma_{n-p}} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Aus (5.7) folgen mit Satz 4.2 aus (5.8), ..., (5.12) die Abschätzungen (5.13)

$$R_{km}^{a(1)} = O \left(\sum_{j=1}^{p-\ell} \sum_{i=1}^p h_j^{(m)}(x) h_i^{*(k)}(\xi) / \varrho^{n-p} \right)$$

$$R_{km}^{a(2)} = O \left(\sum_{j=p-\ell+1}^p \sum_{i=1}^p h_j^{(m)}(x) h_i^{*(k)}(\xi) / \varrho^{n-p} \alpha^{j-p+1} \right)$$

$$R_{km}^{a(3)} = O \left(e^{\varrho \omega_{\mathcal{A}} x} \sum_{i=1}^p h_i^{*(k)}(\xi) / \varrho^{k_{\gamma_{n-p}} - m + n - p} \right)$$

$$R_{km}^{a(4)} = O \left(e^{\varrho \omega_{\mathcal{A}+1}(x-a)} \sum_{i=1}^p h_i^{*(k)}(\xi) / \varrho^{k_{\gamma_{n-p}} - m + n - p} \right)$$

$$R_{km}^{a(5)} = O \left(\sum_{j=p-\ell+1}^p h_j^{(m)}(x) e^{\varrho \omega_{\mathcal{A}}(a-\xi)} / \varrho^{n-1-k_M-k} \right)$$

$$R_{km}^{a(6)} = O \left(\sum_{j=p-\ell+1}^p h_j^{(m)}(x) e^{\varrho \omega_{\mathcal{A}}(a-\xi)} / \varrho^{n-1-k_M-k} \alpha^{j-p-1} \right)$$

$$R_{km}^{a(7)} = O \left(e^{\varrho \omega_{\mathcal{A}}(a-\xi)+x} / \varrho^{n-1+\epsilon_3-k-m} \right)$$

$$R_{km}^{a(8)} = O \left(e^{\varrho \omega_{\mathcal{A}+1}(x-a) + \varrho \omega_{\mathcal{A}}(a-\xi)} / \varrho^{n-1+\epsilon_3-k-m} \right)$$

$$R_{km}^{a(9)} = O \left(\sum_{j=1}^{p-\ell} h_j^{(m)}(x) e^{-\varrho \omega_{\mathcal{A}+1}\xi} / \varrho^{n-1-k_M-k} \right)$$

$$R_{km}^{a(10)} = 0 \left(\sum_{j=1}^{p-\ell} h_j^{(m)}(x) e^{-\varrho \omega_{x+1}^{\varphi}} / \varrho^{n-1-k_M-k} a^{j-p+1} \right)$$

$$R_{km}^{a(11)} = 0 \left(e^{-\varrho \omega_{x+1}^{\varphi} + \varrho \omega_x^{\varphi}} / \varrho^{n-1+\varepsilon_3-k-m} \right)$$

$$R_{km}^{a(12)} = 0 \left(e^{\varrho \omega_{x+1}^{(x-a-\varphi)}} / \varrho^{n-1+\varepsilon_3-k-m} \right)$$

mit

$$k_M = \max_{j \in I_1} (k_j, k_{\theta_1})$$

(5.14)

$$\varepsilon_3 = \max_{j \in I_1} (0, \varepsilon_2 - k_j).$$

Wenn wir die obigen Ergebnisse zusammenfassen, erhalten wir den folgenden Satz:

Satz 5.1 Die Greensche Funktion $G_a(x, \varphi, \varrho)$ des Problems (5.1), (5.2) und ihre Ableitungen nach x und φ bis zur $(n-1)$ -ten Ordnung besitzen im Fall $n-p=2\alpha=4\gamma$ für jedes $v=0, 1, \dots, 2(n-p)-1$ in den Bereichen von $S_{\alpha v}$, für die $|\varrho_{-1} + \varrho_0 e^{\varrho \omega_{x_0}^a} + \varrho_1 e^{2\varrho \omega_{x_0}^a}| > \delta > 0$ gilt, die asymptotische Darstellung

$$(5.15) \quad \frac{\partial^k}{\partial \varphi^k} \frac{\partial^m}{\partial x^m} G_a(x, \varphi, \varrho) = \sum_{i=1}^{12} R_{km}^{a(i)}(x, \varphi, \varrho) + \begin{cases} \frac{1}{(n-p)\varrho^{n-1-k-m}} \sum_{j=1}^{\alpha\varrho} (-1)^{k_{\omega_j}^{k+m+1-p}} e^{\varrho \omega_j^{(x-\varphi)}} [1] & \text{für } x < \varphi \\ \left\{ \frac{1}{(n-p)\varrho^{n-1-k-m}} \sum_{j=1}^{\alpha_1-p} (-1)^{k_{\omega_j}^{k+m+1-p}} e^{\varrho \omega_j^{(x-\varphi)}} [1] + \frac{1}{\varrho^{n-p}} \sum_{j=1}^p h_j^{(m)}(x) h_j^{*(k)}(\varphi) [1] \right\} & \text{für } x > \varphi \end{cases}$$

wobei für $R_{km}^{a(i)}$ die Abschätzungen (5.13) gelten.

Bemerkung: Falls die Voraussetzung V_1 nicht erfüllt ist, bleibt die Greensche Funktion $G_a(x, \xi, \eta)$ für $a > a_0$ und festes x und η i. a. nicht mehr beschränkt. So enthält z.B. die Greensche Funktion des Problems, das erzeugt wird von der Dgl. $y^{(iv)} = \lambda y''$ und den Randbedingungen $U_1(y) = 0$ mit $U_1(y) = y(a) + y(0)$, $U_2(y) = y'(a) + y'(0)$, $U_3(y) = y''(0)$, $U_4(y) = y''(a)$, einen Term der Gestalt $O(a^2/\eta^3)$.

b) $I = [-a, a]$

Wir betrachten nun das Randwertproblem, das erzeugt wird von der Dgl. (5.1) und den Randbedingungen

$$(5.16) \quad U_v^a(y) = U_{v,-a}(y) + U_{v,a}(y) = 0 \quad 1 \leq v \leq n.$$

Die Randbedingungen sollen dabei die zu (5.3) analoge Gestalt haben, d.h. es sei

$$U_{v,-a}(y) = a_v y^{(k_v)}(-a) + \sum_{j=\xi_v}^{k_v-1} a_{vj} y^{(j)}(-a)$$

und $U_{v,a}, k_v, a_v, a_{vj}, b_v, b_{vj}$ seien definiert wie in (5.3).

$\{y_1(x, \eta), \dots, y_n(x, \eta)\}$ sei ein Fundamentalsystem der Dgl.

(5.1), welches den Abschätzungen von Satz 4.1 genügt.

Von den Randbedingungen (5.16) fordern wir:

V_2 : (i) Es gebe eine Teilmenge $I_1 = \{\alpha_1, \dots, \alpha_p\} \subset \{1, 2, \dots, n\}$, so daß die durch

$$D_a := \begin{vmatrix} U_{\alpha_1}^a(y_1) & \dots & U_{\alpha_1}^a(y_p) \\ \vdots & & \vdots \\ U_{\alpha_p}^a(y_1) & \dots & U_{\alpha_p}^a(y_p) \end{vmatrix}$$

definierten Zahlen D_a für alle $a \geq a_0$ dem Betrage nach größer als eine Konstante $D > 0$ sind und so, daß für jede Teilmenge $\{\beta_1, \dots, \beta_p\} \subset \{1, 2, \dots, n\}$

$$\frac{1}{D_a} \begin{vmatrix} U_{\beta_1}^a(h_1) & \dots & U_{\beta_1}^a(h_p) \\ \vdots & & \vdots \\ U_{\beta_p}^a(h_1) & \dots & U_{\beta_p}^a(h_p) \end{vmatrix} = O(1/a^i), \quad i \geq 0$$

gilt.

O.B.d.A. fordern wir hier $i \geq 1$; falls $i=0$ ist, müssen wir die folgenden Bedingungen analog zum Fall $k_{n-p+1} = k_{n-p}$, [7a], S.200, abändern.

(ii) Für $a \geq a_0$ gelte für alle ξ mit $|\Delta_a(\xi)| \geq \delta > 0$

$$(5.17) \quad \frac{v^a}{\Delta_a(\xi)} U_v^a(y_k) = O(1) \quad \text{für } a \rightarrow \infty, 1 \leq j, v \leq n, 1 \leq k \leq p.$$

Falls $I_2 = \{\delta_1, \dots, \delta_{n-p}\} = \{1, 2, \dots, n\} - I_1$ gesetzt wird gelte

$k_{\delta_i} \geq k_{\delta_j}$ für $i \leq j$ und ferner fordern wir:

(iii) a) Für ungerades $n-p$, $n-p=2\ell-1$ seien die durch die Identität

$$\Theta_{-1}/s + \Theta_1 s =$$

$$\begin{vmatrix} a_{\delta_1} \omega_{\delta_1}^{k_{\delta_1}} & \dots & a_{\delta_1} \omega_{\delta_1}^{k_{\delta_1}} & \left(\frac{a_{\delta_1}}{s} + b_{\delta_1} s \right) \omega_{\delta_1}^{k_{\delta_1}} & b_{\delta_1} \omega_{\delta_1}^{k_{\delta_1}} & \dots & b_{\delta_1} \omega_{\delta_1}^{k_{\delta_1}} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{\delta_{n-p}} \omega_{\delta_{n-p}}^{k_{\delta_{n-p}}} & \dots & a_{\delta_{n-p}} \omega_{\delta_{n-p}}^{k_{\delta_{n-p}}} & \left(\frac{a_{\delta_{n-p}}}{s} + b_{\delta_{n-p}} s \right) \omega_{\delta_{n-p}}^{k_{\delta_{n-p}}} & b_{\delta_{n-p}} \omega_{\delta_{n-p}}^{k_{\delta_{n-p}}} & \dots & b_{\delta_{n-p}} \omega_{\delta_{n-p}}^{k_{\delta_{n-p}}} \end{vmatrix}$$

definierten Zahlen Θ_{-1} und Θ_1 von Null verschieden.

b) Für gerades $n-p, n-p=2\kappa$ seien die durch die Identität $\Theta_{-2}/s^2 + \Theta_0 + \Theta_2 s^2 =$

$$\left| \begin{array}{ccccccc} a_{\gamma_1} \omega_1^{k_{\gamma_1}} & \dots & a_{\gamma_{\kappa-1}} \omega_{\kappa-1}^{k_{\gamma_{\kappa-1}}} & \left(\frac{a_{\gamma_\kappa}}{s} + b_{\gamma_\kappa} s \right) \omega_{\kappa}^{k_{\gamma_\kappa}} & \left(\frac{a_{\gamma_{\kappa+1}}}{s} + b_{\gamma_{\kappa+1}} s \right) \omega_{\kappa+1}^{k_{\gamma_{\kappa+1}}} & b_{\gamma_{\kappa+2}} \omega_{\kappa+2}^{k_{\gamma_{\kappa+2}}} & \dots & b_{\gamma_{n-p}} \omega_{n-p}^{k_{\gamma_{n-p}}} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{\gamma_{n-p}} \omega_1^{k_{\gamma_{n-p}}} & \dots & a_{\gamma_{n-p}} \omega_{\kappa-1}^{k_{\gamma_{n-p}}} & \left(\frac{a_{\gamma_{n-p}}}{s} + b_{\gamma_{n-p}} s \right) \omega_{\kappa}^{k_{\gamma_{n-p}}} & \left(\frac{a_{\gamma_{n-p}}}{s} + b_{\gamma_{n-p}} s \right) \omega_{\kappa+1}^{k_{\gamma_{n-p}}} & b_{\gamma_{n-p}} \omega_{\kappa+2}^{k_{\gamma_{n-p}}} & \dots & b_{\gamma_{n-p}} \omega_{n-p}^{k_{\gamma_{n-p}}} \end{array} \right|$$

definierten Zahlen Θ_{-2} und Θ_2 von Null verschieden.

Ende von Voraussetzung V_2 .

Zur Abschätzung der Greenschen Funktion $G_a(x, \varphi, \varphi)$ des Problems (5.1), (5.16) und ihrer Ableitungen nach x und φ verwenden wir wieder die Darstellung (5.6), wobei zu beachten ist, daß dort jeweils 0 durch $-a$ zu ersetzen ist. Auch hier beschränken wir uns wieder auf den Fall $n-p=2\kappa$ und einen Sektor $S_{\alpha k}$ der φ -Ebene, für den

$$\Re(\varphi \omega_1) \leq \dots \leq \Re(\varphi \omega_{\kappa}) \leq 0 \leq \Re(\varphi \omega_{\kappa+1}) \leq \dots \leq \Re(\varphi \omega_{n-p})$$

gilt.

Aus der Voraussetzung V_2 folgt mit den Abschätzungen von Satz 4.1:

$$(5.18) \Delta_a(\varphi) = D_a e^{-\varphi \omega_1 a - \dots - \varphi \omega_{\kappa} a + \varphi \omega_{\kappa+1} a + \dots + \varphi \omega_{n-p} a} \cdot \varphi^{k_{\gamma_1} + \dots + k_{\gamma_{n-p}}} \left[\Theta_{-2} + \Theta_0 e^{2\varphi \omega_{\kappa} a} + \Theta_2 e^{4\varphi \omega_{\kappa} a} \right].$$

Für alle φ und a , für die $\left| \Theta_{-2} + \Theta_0 e^{2\varphi \omega_{\kappa} a} + \Theta_2 e^{4\varphi \omega_{\kappa} a} \right| \geq \delta > 0$

gilt, erhalten wir mit (5.17)

$$(5.19) \quad \frac{v^a}{\Delta_a(\xi)} U_v^a(y_k) =$$

$$\left. \begin{array}{ll} O(1) & j \in J_1, v \in I_1 \\ O(e^{-\xi \omega_{j-p}^a / \xi^{k_{\delta_{n-p}}}}) & j \in J_3, v \in I_1 \\ O(1/\xi^{k_v - k_{M_1}}) & j \in J_1, v \in I_2 \\ O(e^{-\xi \omega_{j-p}^a / \xi^{k_v}}) & j \in J_3, v \in I_2 \\ O(e^{\xi \omega_{j-p}^a / \xi^{k_{\delta_{n-p}}}}) & j \in J_2, v \in I_1 \\ O(e^{\xi \omega_{j-p}^a / \xi^{k_v}}) & j \in J_2, v \in I_2 \end{array} \right\} k \in J_1$$

$$\text{bzw. } \frac{v^a}{\Delta_a(\xi)} U_{v,a}(y_k) =$$

$$\left. \begin{array}{ll} O(e^{\xi \omega_{k-p}^a \cdot \xi^{k_v}}) & j \in J_1, v \in I_1 \\ O(e^{\xi \omega_{k-p}^a - \xi \omega_{j-p}^a / \xi^{k_{\delta_{n-p}} - k_v}}) & j \in J_3, v \in I_1 \\ O(e^{\xi \omega_{k-p}^a \cdot \xi^{k_{M_1}}}) & j \in J_1, v \in I_2 \\ O(e^{\xi \omega_{k-p}^a - \xi \omega_{j-p}^a}) & j \in J_3, v \in I_2 \\ O(e^{\xi \omega_{k-p}^a + \xi \omega_{j-p}^a / \xi^{k_{\delta_{n-p}} - k_v}}) & j \in J_2, v \in I_1 \\ O(e^{\xi \omega_{k-p}^a + \xi \omega_{j-p}^a}) & j \in J_2, v \in I_2 \end{array} \right\} k \in J_2$$

$$\text{bzw. } \frac{v^a}{\Delta_a(\xi)} U_{v,-a}(y_k) =$$

$$\begin{array}{ll}
 O(e^{-\vartheta \omega_{k-p}^a} \vartheta^{k_v}) & j \in J_1, v \in I_1 \\
 O(e^{-\vartheta \omega_{k-p}^a - \vartheta \omega_{j-p}^a} / \vartheta^{k_{n-p}} \vartheta^{-k_v}) & j \in J_3, v \in I_1 \\
 O(e^{-\vartheta \omega_{k-p}^a} \vartheta^{k_{M_1}}) & j \in J_1, v \in I_2 \\
 O(e^{-\vartheta \omega_{k-p}^a - \vartheta \omega_{j-p}^a}) & j \in J_2, v \in I_2 \\
 O(e^{-\vartheta \omega_{k-p}^a + \vartheta \omega_{j-p}^a} / \vartheta^{k_{n-p}} \vartheta^{-k_v}) & j \in J_2, v \in I_1 \\
 O(e^{-\vartheta \omega_{k-p}^a + \vartheta \omega_{j-p}^a}) & j \in J_2, v \in I_2
 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}} \right\} k \in J_3$$

Mit $J_1 = \{1, 2, \dots, p\}$, $J_2 = \{p+1, \dots, p+\alpha\}$, $J_3 = \{p+\alpha+1, \dots, n\}$ und

$$k_{M_1} = \max_{j \in I_1} k_j.$$

Damit erhalten wir:

Satz 5.2 Die Greensche Funktion $G_a(x, \vartheta, \vartheta)$ des Problems (5.1), (5.16) und ihre Ableitungen nach x und ϑ bis zur $(n-1)$ -ten Ordnung besitzen im Fall $n-p=2\alpha$ in den Bereichen von S_{0k} , in denen

$$|\vartheta_{-2} + \vartheta_0 e^{2\vartheta \omega_{\alpha}^a} + \vartheta_2 e^{4\vartheta \omega_{\alpha}^a}| \geq \delta > 0$$

gilt, die asymptotische Darstellung (5.15).

Für die Terme $R_{km}^{a(i)}(x, \vartheta, \vartheta)$ gelten dabei die folgenden Abschätzungen:

$$R_{km}^{a(1)} + R_{km}^{a(2)} = O \left(\sum_{j=1}^p \sum_{i=1}^p h_j^{(m)}(x) h_i^*(k)(\vartheta) / \vartheta^{n-p} \right)$$

$$R_{km}^{a(3)} = O \left(e^{\vartheta \omega_{\alpha}^a(x+a)} \sum_{i=1}^p h_i^*(k)(\vartheta) / \vartheta^{k_{n-p} - m - n - p} \right)$$

$$R_{km}^{a(4)} = 0 \left(e^{\xi \omega_{\alpha+1}(x-a)} \frac{\sum_{i=1}^p h_i^*(k)(\xi)}{\xi} \xi^{k_{\alpha-p} - m + n - p} \right)$$

$$R_{km}^{a(5)} + R_{km}^{a(6)} = 0 \left(\sum_{j=1}^p h_j^{(m)}(x) e^{\xi \omega_{\alpha}(a-\xi)} \xi^{n-1-k-m-k} \right)$$

$$R_{km}^{a(7)} = 0 \left(e^{\xi \omega_{\alpha}(a-\xi+x+a)} / \xi^{n-1+\xi_0-k-m} \right)$$

$$R_{km}^{a(8)} = 0 \left(e^{\xi \omega_{\alpha}(a-\xi) + \xi \omega_{\alpha+1}(x-a)} / \xi^{n-1+\xi_0-k-m} \right)$$

$$R_{km}^{a(9)} + R_{km}^{a(10)} = 0 \left(\sum_{j=1}^p h_j^{(m)}(x) e^{-\xi \omega_{\alpha+1}(\xi+a)} / \xi^{n-1-k-m-k} \right)$$

$$R_{km}^{a(11)} = 0 \left(e^{\xi \omega_{\alpha}(x+a) - \xi \omega_{\alpha+1}(\xi+a)} / \xi^{n-1+\xi_0-k-m} \right)$$

$$R_{km}^{a(12)} = 0 \left(e^{\xi \omega_{\alpha+1}(x-a-\xi-a)} / \xi^{n-1+\xi_0-k-m} \right)$$

Dabei ist $\xi_0 := \min_{\nu \in I_1} (0, k_{\alpha-p} - k_{\nu})$ und die Funktionen

$\{h_1(x), \dots, h_p(x)\}$ bilden ein Fundamentalsystem der Dgl.

$n(y)=0$, welches die Abschätzungen von Satz 3.1 erfüllt.

Die Funktionen $\{h_1^*(\xi), \dots, h_p^*(\xi)\}$ bilden ein Fundamentalsystem der Dgl. $n^*(y)=0$ und erfüllen die zu (4.20), (4.21) analogen Abschätzungen.

§6 Entwicklungssätze

In diesem Paragraphen betrachten wir das Verhalten von Integraltransformationen der Gestalt

$$\frac{n-p}{2\pi i} \int_{\gamma_{\alpha}^R} \int_{\alpha_0}^{\infty} f(\xi) n^*(\varphi(x, \xi, \zeta)) \zeta^{n-p-1} d\xi d\zeta$$

für $|\zeta| \rightarrow \infty$ und $\alpha_0 = 0$.

Dabei ist γ_{α}^R ein Kreisbogenabschnitt in der ζ -Ebene mit $|\zeta| = R$ und $\alpha \leq \arg \zeta \leq \alpha + \frac{2\pi}{n-p}$ für $\zeta \in \gamma_{\alpha}^R$ und $\varphi(x, \xi, \zeta)$ wird definiert durch eine bestimmte Folge $G_{a_k}(x, \xi, \zeta)$ von Greenschen Funktionen, die zu Problemen der a_k Gestalt (5.1), (5.2) bzw. (5.1), (5.16) gehören, die die Voraussetzungen V_1 bzw. V_2 erfüllen.

Wir beschränken uns hier auf den Fall $n-p=2k=4\eta+2$ und

$$\text{setzen } \gamma_{00}^R = \{\zeta \mid |\zeta| = R, 0 \leq \arg \zeta \leq \frac{\pi}{n-p}\}$$

$$\text{und } \gamma_{01}^R = \{\zeta \mid |\zeta| = R, \frac{\pi}{n-p} \leq \arg \zeta \leq \frac{2\pi}{n-p}\}.$$

Zuerst betrachten wir den Fall $\alpha_0 = 0$, wir erhalten für diesen Fall die folgenden Ergebnisse:

Satz 6.1 $G_a(x, \xi, \zeta)$ sei die Greensche Funktion eines Randwertproblems der Gestalt (5.1), (5.2). Falls die Randbedingungen (5.2) die Voraussetzung V_1 erfüllen, gibt es für jedes genügend große R eine monotone Folge $\{a_v\}$ mit $a_v \in \mathbb{R}$ und $\lim_{v \rightarrow \infty} a_v = \infty$, so daß für $0 \leq x \leq A$ und $0 \leq \xi < \infty$ gilt

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \int_{\gamma_{00}^R} (n-p) \zeta^{n-p-1} n^*(G_{a_v}(x, \xi, \zeta) - \psi_0(x, \xi, \zeta)) d\zeta$$

$$= \lim_{\nu \rightarrow \infty} \int_{\gamma_{0,1}^{\nu}} (n-p) \varrho^{n-p-1} n^*(G_{a_{\nu}}(x, \xi, \varrho) - \varphi_1(x, \xi, \varrho)) d\varrho$$

(6.1)

$$= 0.$$

Die Konvergenz ist gleichmäßig für $0 \leq x \leq A, 0 \leq \xi \leq B$ und die Funktion $\varphi_0(x, \xi, \varrho)$ hat für $\varrho \in S_{00}, |\varrho| > |\varrho_0|$, die Gestalt

$$(6.2) \quad \varphi_0(x, \xi, \varrho) = \varphi_{OR}(x, \xi, \varrho) + \begin{cases} \sum_{j=p+1}^{p+\kappa} y_j(x, \varrho) \frac{w_j(\xi, \varrho)}{w} & \text{für } x > \xi \\ - \left(\sum_{j=1}^p + \sum_{j=p+\kappa+1}^n \right) y_j(x, \varrho) \frac{w_j(\xi, \varrho)}{w} & \text{für } x < \xi \end{cases}$$

Dabei sei $\{y_1(x, \varrho), \dots, y_n(x, \varrho)\}$ in S_{00} das in Satz 4.2 abgeschätzte Fundamentalsystem der Dgl. (4.1) und $w_{\nu}(x, \varrho)$ sei die Adjunkte von $y_{\nu}^{(n-1)}(x, \varrho)$ in der zu der Wronskideterminante w der Funktionen $y_1(x, \varrho), \dots, y_n(x, \varrho)$ gehörenden Matrix.

Falls wir mit $\tilde{v}_{j\nu}$ den Hauptterm von $\frac{v_{j\nu}}{\Delta_a(\varrho)}$ bezeichnen, so ist

$$\varphi_{OR}(x, \xi, \varrho) = \left(\sum_{j=1}^{p-\ell} + \sum_{j=p+1}^{p+\kappa} \right) \left(\sum_{i=1}^p + \sum_{i=p+\kappa+1}^n \right) \sum_{\nu=1}^n y_j(x, \varrho) U_{\nu 0}(y_i) \frac{w_i(\xi, \varrho)}{w} \tilde{v}_{j\nu}$$

$\nu \notin I_1$

d.h. der Hauptterm von $\varphi_{OR}(x, \xi, \varrho)$ ist gleich dem Hauptterm von (siehe (5.13))

$$R_{00}^{a(1)}(x, \xi, \varrho) + R_{00}^{a(3)}(x, \xi, \varrho) + R_{00}^{a(9)}(x, \xi, \varrho) + R_{00}^{a(11)}(x, \xi, \varrho)$$

und für $\varrho \in S_{00, \ell} = \{\varrho \mid 0 < \ell \leq \arg \varrho \leq \frac{\pi}{n-p} - \ell\}$ mit $|\varrho| > |\varrho_0|$ gilt gleichmäßig bzgl. $0 \leq x \leq A, 0 \leq \xi \leq B$ und $\varrho \in S_{00, \ell}$:

Beweis zu Satz 6.1 Analog zu Stone [23b], S. 660, können wir zeigen, daß für jedes genügend große R eine monotone Folge $\{a_k\}$ existiert, mit $a_k \in \mathbb{R}$ und $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = \infty$, so daß mit den in V_1 definierten Zahlen $\theta_{-1}, \theta_0, \theta_1$ für $k \geq 1$

$$(6.3) \quad |\theta_{-1} + \theta_0 e^{s\omega_k a_k} + \theta_1 e^{2s\omega_k a_k}| \geq \delta > 0$$

gilt, falls $s \in \mathcal{Y}_{00}^R$ ist.

Da für $n-p=2\gamma+2$ bei dem Übergang von S_{00} zu S_{01} die Zahlen ω_k und $\omega_{k+1} = -\omega_k$ ihre Rollen vertauschen, d.h. falls $\Re(s\omega_k) \leq 0$ für $s \in S_{00}$ gilt, so gilt $\Re(s\omega_{k+1}) \leq 0 \leq \Re(s\omega_k)$ für $s \in S_{01}$, gilt die Gleichung (6.3) auch für $s \in S_{01}$ mit $|s| > |s_0|$, d.h. auch für $s \in \mathcal{Y}_{01}^R$.

Aus den Abschätzungen von Satz 5.2 folgt daher wegen

$$n^*(h_1^*(\xi)) = 0, 1 \leq i \leq p, \text{ für } s \in \mathcal{Y}_{00}^R$$

$$(n-p)s^{n-p-1} n^*(G_{a_k}(x, \xi, s) - \varphi_0(x, \xi, s))$$

$$= m_1^k(x, \xi, s)/a_k \cdot s^2 + m_2^k(x, \xi, s) e^{s\omega_{k+1}(x-a_k)} s^{k_M}$$

$$+ m_3^k(x, \xi, s) e^{s\omega_k(a_k - \xi)} s^{k_M} = J_1 + J_2 + J_3.$$

Die Funktionen $m_i^k(x, \xi, s)$, $1 \leq i \leq 3$, sind dabei für $0 \leq x \leq A$, $0 \leq \xi \leq a_k$ und $s \in S_{00}$, $|s| > |s_0|$, gleichmäßig beschränkt.

Für die Integrale über die Terme J_i der Differenz folgt:

$$\left| \int_{\mathcal{Y}_{00}^R} J_1(x, \xi, s) d\xi \right| \leq c_0/a_k \rightarrow 0 \quad \text{für } k \rightarrow \infty$$

$$\left| \int_{\gamma_{00}^R} J_2(x, \xi, \zeta) d\zeta \right| \leq c_1 \int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} e^{\frac{R^2}{\kappa} \varphi(x-a_k)} R d\varphi$$

$$\leq c_2 \pi / 2 (x - a_k) \leq c_3 / a_k, \text{ da } 0 \leq x \leq A, k \geq k_0.$$

Falls $0 \leq \xi \leq B$ ist, folgt analog $\left| \int_{\gamma_{00}^R} J_3(x, \xi, \zeta) d\zeta \right| \leq c_4 / a_k.$

Falls $\xi \in [0, \omega)$ beliebig zugelassen wird, wählen wir k so groß, daß $a_k > \xi$ gilt und es folgt

$$\left| \int_{\gamma_{00}^R} J_3(x, \xi, \zeta) d\zeta \right| \leq c_5(\xi) / a_k$$

mit einer von ξ abhängigen Konstanten c_5 .

Analog erhalten wir die Behauptung über das Integral über den Bogen γ_{01}^R .

Nun setzen wir

$$(6.4) \quad \varphi(x, \xi, \zeta) = \begin{cases} \varphi_0(x, \xi, \zeta) & \text{für } 0 \leq x \leq A, 0 \leq \xi < \omega, \zeta \in S_{00}, |\zeta| > |\xi_0| \\ \varphi_1(x, \xi, \zeta) & \text{für } 0 \leq x \leq A, 0 \leq \xi < \omega, \zeta \in S_{01}, |\zeta| > |\xi_0| \end{cases}$$

dann folgt aus Satz 6.1:

Satz 6.2 Sei $f(x) \in L(0, \omega)$, dann gilt gleichmäßig für $0 \leq x \leq A$

$$(6.5) \quad \lim_{v \rightarrow \infty} \int_0^{a_v} f(\xi) \int_{\gamma_0^R} (n-p) \zeta^{n-p-1} n^*(G_{a_v}(x, \xi, \zeta)) d\zeta d\xi \\ = \int_0^\omega f(\xi) \int_{\gamma_0^R} (n-p) \zeta^{n-p-1} n^*(\varphi(x, \xi, \zeta)) d\zeta d\xi$$

Ferner gilt

$$\begin{aligned}
 (6.6) \quad & \int_0^{\infty} f(\xi) \int_{\mathcal{Y}_0^R} (n-p) \xi^{n-p-1} n^*(\varphi(x, \xi, \xi)) d\xi d\xi \\
 &= \int_{\mathcal{Y}_0^R} \int_0^{\infty} f(\xi) (n-p) \xi^{n-p-1} n^*(\varphi(x, \xi, \xi)) d\xi d\xi
 \end{aligned}$$

Beweis: Die Behauptung (6.5) folgt aus (6.1) wegen

$$\begin{aligned}
 & \left| \int_0^{a_v} f(\xi) \int_{\mathcal{Y}_0^R} (n-p) \xi^{n-p-1} n^*(G_a - \varphi) d\xi d\xi \right| \\
 &= \left| \left(\int_0^B + \int_B^{a_v} \right) f(\xi) \int_{\mathcal{Y}_0^R} (n-p) \xi^{n-p-1} n^*(G_a - \varphi) d\xi d\xi \right| \\
 &\leq \left| \int_0^B f(\xi) \int_{\mathcal{Y}_0^R} (n-p) \xi^{n-p-1} n^*(G_a - \varphi) d\xi d\xi \right| + M \int_B^{a_v} |f| d\xi < \varepsilon
 \end{aligned}$$

für $B \geq B(\varepsilon)$, $v \geq v_0(\varepsilon, \xi)$, $M \in \mathbb{R}$ und $0 \leq x \leq A$.

Da $f(\xi) \in L(0, \infty)$ ist und da $n^*(\varphi(x, \xi, \xi))$ für jedes feste $x \in [0, \infty)$ und jedes feste R bzgl. $\xi \in [0, \infty)$ und $\xi \in \mathcal{Y}_0^R$ gleichmäßig beschränkt ist, können wir in (6.6) die Reihenfolge der Integrationen vertauschen.

(6.7) $m_1(y) = \lambda n(y)$, $\hat{U}_v^a(y) = 0$, $1 \leq v \leq n$ sei ein zweites Randwertproblem der Gestalt (5.1), (5.2), wobei die Randbedingungen $\hat{U}_v^a(y)$, $1 \leq v \leq n$, ebenfalls die Voraussetzung V_1 erfüllen.

Mit $\tilde{\varphi}(x, \xi, \xi)$ bzw. $\tilde{k}_M$ seien die der durch (6.4) definierten Funktion $\varphi(x, \xi, \xi)$ bzw. der durch (5.14) definierten Zahl k_M entsprechende Funktion bzw. Zahl des Problems (6.7) bezeichnet, dann gilt der folgende Äquikonvergenzsatz:

Satz 6.2 Sei $f(x) \in L(0, \infty)$ und $f(x) = 0$ für $x \in [0, \vartheta]$, $\vartheta > 0$.

Falls $k_M = \tilde{k}_M = 0$ ist, gilt gleichmäßig für $0 \leq x \leq A$

$$(6.8) \quad \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{(n-p)}{2\pi i} \int_{\gamma_R} \int_0^\infty f(\xi) \xi^{n-p-1} n^*(\varphi(x, \xi, \xi) - \tilde{\varphi}(x, \xi, \xi)) d\xi d\xi = 0.$$

Aufgrund der Randbedingungen kann der Fall $k_M = 0$ nur eintreten, falls $0 \leq p \leq 2$ gilt, falls $p \geq 3$ ist, gilt Satz 6.3 i.a. nicht mehr. $k_M = 0$ gilt nur in den Fällen

$p=0$ (vergleiche hierzu die Ergebnisse von [1])

$p=1$ und $k_n = 0, k_v$ beliebig für $1 \leq v \leq n-1$

$p=2$ und $k_{\alpha_1} = k_{\beta_1} = 0, k_v$ beliebig für $1 \leq v = n-p$.

Beweis zu Satz 6.3 Aus den Abschätzungen aus Satz 4.2

für die Funktionen $y_j^{(k)}(x, \xi)$, aus den Abschätzungen (5.8) für die Funktionen $w_j^{(k)}(x, \xi)/w$ und aus Satz 5.1 folgt wegen $n^*(h_1^*) = 0$ für $1 \leq i \leq p$ aus (6.2)

$$(6.9) \quad (n-p) \xi^{n-p-1} n^*(\varphi_j(x, \xi, \xi) - \tilde{\varphi}_j(x, \xi, \xi))$$

$$= (-1)^p \begin{cases} \sum_{v=1}^{\infty} e^{\xi \omega_v(x-\xi)} [\omega_v] / \xi & \text{für } x > \xi \\ \sum_{v=\infty}^{n-p} e^{\xi \omega_v(x-\xi)} [\omega_v] / \xi - \sum_{v=1}^p (n-p) x^{v-1} \left[\frac{1}{\xi^2} \right] & \text{für } x < \xi \end{cases}$$

$$+ (n-p) \xi^{n-p-1} n^*(\varphi_{jR}(x, \xi, \xi) - \tilde{\varphi}_{jR}(x, \xi, \xi)) \quad j=0, 1.$$

mit

$$\begin{aligned}
 & (n-p)_S^{n-p-1} n^*(\varphi_{jR}(x, \xi, S) - \tilde{\varphi}_{jR}(x, \xi, S)) \\
 & = O(x^{p-1-1/S^2}) + O(e^{S\omega_{\kappa}x}/S^2) + O(x^{p-1-1} \cdot e^{-S\omega_{\kappa+1}}) \\
 & + O(e^{S\omega_{\kappa}x - S\omega_{\kappa+1}\xi}/S^{\xi 3}) := I + II + III + IV.
 \end{aligned}$$

Mit der Abschätzung (6.9) folgt für das Integral über die Differenz der Hauptterme von $(n-p)_S^{n-p-1} n^*(\varphi(x, \xi, S) - \tilde{\varphi}(x, \xi, S))$ in (6.8) auf jedem der Bögen $\gamma_{0j}^R, j=0, 1$:

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2\pi i} \int_0^x f(\xi) \int_{\gamma_{0j}^R} \sum_{v=1}^{\kappa} e^{S\omega_v(x-\xi)} \frac{\omega_v}{S} d\xi d\xi \\
 & + \frac{1}{2\pi i} \int_x^{\infty} f(\xi) \int_{\gamma_{0j}^R} \sum_{v=\kappa+1}^{n-p} e^{S\omega_v(x-\xi)} \frac{\omega_v}{S} d\xi d\xi \\
 & \leq c_1 \left\{ \left| \int_{\gamma_{0j}^R} \int_0^{x-\delta} f(\xi) e^{S\omega_{\kappa}(x-\xi)} \frac{1}{S} d\xi d\xi \right| \right. \\
 & \quad + \left| \int_{\gamma_{0j}^R} \int_{x-\delta}^x f(\xi) e^{S\omega_{\kappa}(x-\xi)} \frac{1}{S} d\xi d\xi \right| \\
 & \quad + \left| \int_{\gamma_{0j}^R} \int_x^{x+\delta} f(\xi) e^{S\omega_{\kappa+1}(x-\xi)} \frac{1}{S} d\xi d\xi \right| \\
 & \quad \left. + \left| \int_{\gamma_{0j}^R} \int_{x+\delta}^{\infty} f(\xi) e^{S\omega_{\kappa+1}(x-\xi)} \frac{1}{S} d\xi d\xi \right| \right\}
 \end{aligned}$$

$$:= A+B+C+D.$$

Sei nun $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben, dann wählen wir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ so klein, daß für beliebiges x gilt

$$\int_x^{x+\delta} |f(\xi)| d\xi \leq \varepsilon/2.$$

Damit folgt:

$$B+C \leq c_2 \int_{x-\delta}^{x+\delta} |f(\xi)| d\xi \int_{\delta_{0j}^R} \left| \frac{d\xi}{\xi} \right| \leq c_3 \int_{x-\delta}^{x+\delta} |f(\xi)| d\xi = c_3 \varepsilon.$$

Nun halten wir $\delta = \delta(\varepsilon)$ fest, dann folgt

$$\begin{aligned} A+D &\leq c_4 \int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{n-p}} \left(\int_0^{x-\delta} + \int_{x-\delta}^x \right) |f(\xi)| e^{\Re(i \operatorname{Re}^{-1} \varphi) \delta} d\xi d\varphi \\ &\leq c_5 \left(\int_0^{x-\delta} + \int_{x-\delta}^x \right) |f(\xi)| \left(\int_0^{\frac{\pi}{n-p}} e^{-R \frac{2}{\pi} \varphi \delta} d\varphi \right) d\xi \\ &\leq c_6 (1 - e^{-R \frac{2}{n-p} \delta}) / R = c_7 \frac{1}{R}. \end{aligned}$$

Da die beiden Summanden I+II der Differenz $n^*(\varphi_R - \tilde{\varphi}_R)$ sich wie $O(1/\varepsilon^2)$ verhalten, gilt

$$\left| \int_0^\infty f(\xi) (I+II) d\xi d\xi \right| = O(1/R).$$

Zur Abschätzung der durch die Terme III und IV gelieferten Integrale zerlegen wir $f(\xi)$ in zwei Funktionen $f_1(\xi)$ und $f_2(\xi)$ mit $f(\xi) = f_1(\xi) + f_2(\xi)$, so daß

$$\begin{aligned} \int_0^\infty |f_1(\xi)| d\xi &\leq \varepsilon_1 \\ \text{und} \quad (6.10) \quad f_2(\xi) &= f_2(0) + \int_0^\xi f_2'(t) dt \end{aligned}$$

gilt. Ferner benutzen wir die Abschätzung

$$\begin{aligned}
 (6.11) \quad & \int_{\mathfrak{Y}}^{\infty} e^{-\mathfrak{S}\omega_{\mathfrak{x}+1}\xi} f_2(\xi) d\xi \\
 = & e^{-\mathfrak{S}\omega_{\mathfrak{x}+1}\mathfrak{Y}} f_2(\mathfrak{Y})/\mathfrak{S}\omega_{\mathfrak{x}+1} + \frac{1}{\mathfrak{S}\omega_{\mathfrak{x}+1}} \int_{\mathfrak{Y}}^{\infty} e^{-\mathfrak{S}\omega_{\mathfrak{x}+1}\xi} f_2'(\xi) d\xi.
 \end{aligned}$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}
 (6.12) \quad & \left| \int_{\mathfrak{Y}_{0j}^R}^{\infty} \int_0^{\infty} f_1(\xi) (\text{III} + \text{IV}) d\xi d\mathfrak{S} \right| \\
 \leq & \int_{\mathfrak{Y}_{0j}^R}^{\infty} \int_{\mathfrak{Y}}^{\infty} |f_1(\xi)| |x^{p-1-1} + e^{-\mathfrak{S}\omega_{\mathfrak{x}+1}\mathfrak{x}}| |e^{-\mathfrak{S}\omega_{\mathfrak{x}+1}\xi}| d\xi d\mathfrak{S} \\
 \leq & c_9 \int_{\mathfrak{Y}}^{\infty} \int_{\mathfrak{Y}_{0j}^R}^{\infty} |f_1(\xi)| e^{-\frac{R^2}{\pi} \mathfrak{Y} \xi} R d\mathfrak{Y} d\xi \\
 = & c_9 \int_{\mathfrak{Y}}^{\infty} \frac{\pi |f_1(\xi)|}{2\xi} (1 - e^{-\frac{R^2}{n-p} \xi}) d\xi \\
 \leq & c_{10} \int_0^{\infty} |f_1(\xi)| d\xi \leq c_{10} \varepsilon_1.
 \end{aligned}$$

Aus der Abschätzung (6.11) folgt

$$\begin{aligned}
 & \left| \int_{\mathfrak{Y}_{0j}^R}^{\infty} \int_0^{\infty} f_2(\xi) e^{-\mathfrak{S}\omega_{\mathfrak{x}+1}\xi} d\xi d\mathfrak{S} \right| = O \left(\left| \int_{\mathfrak{Y}_{0j}^R}^{\infty} \int_0^{\infty} f_2(\xi) (\text{III} + \text{IV}) d\xi d\mathfrak{S} \right| \right) \\
 = & O \left(\left| \int_{\mathfrak{Y}_{0j}^R}^{\infty} (e^{-\mathfrak{S}\omega_{\mathfrak{x}+1}\xi} f_2(\xi)/\mathfrak{S}\omega_{\mathfrak{x}+1} + \frac{1}{\mathfrak{S}\omega_{\mathfrak{x}+1}} \int_{\mathfrak{Y}}^{\infty} e^{-\mathfrak{S}\omega_{\mathfrak{x}+1}\xi} f_2'(\xi) d\xi) d\mathfrak{S} \right| \right) \\
 = & O(\varepsilon + 1/R),
 \end{aligned}$$

da sich dieses Integral analog zu den Integralen A, B, C, D abschätzen läßt.

Damit ist Satz 6.3 bewiesen.

Korollar zu Satz 6.3: Sei $f(\xi) \in L(0, \infty)$, zu einem festen $\delta > 0$ und beliebigem $\varepsilon > 0$ gebe es eine Zerlegung von $f(\xi)$ mit $f(\xi) = f_1(\xi) + f_2(\xi)$ und

$$\int_0^\delta |f_1(\xi)|/\xi d\xi \leq \varepsilon/2, \quad \int_\delta^\infty |f_1(\xi)| d\xi \leq \varepsilon/2 \quad \text{und} \quad f_2(\xi) = \int_0^\xi f_2'(t) dt,$$

dann gilt unter den übrigen Voraussetzungen von Satz 6.3 die Behauptung (6.8).

Beweis: Der Beweis dieses Satzes verläuft analog zu dem Beweis des Satzes 6.3, dabei ist bei der Abschätzung des Integrals (6.12) die obige Voraussetzung über $f_1(\xi)$ zu benutzen und bei der Abschätzung des letzten Integrals ist zu beachten, daß der erste, mit III bezeichnete Term in der Abschätzung (6.11) unter den obigen Voraussetzungen wegen $f_2(0) = 0$ verschwindet.

Satz 6.4 Unter den Voraussetzungen von Satz 6.3 bzw. des obigen Korollars gilt gleichmäßig für $0 \leq x \leq A$

$$(6.13) \quad \lim_{R \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty \int_{\gamma_0^R} f(\xi) (n-p) \xi^{n-p-1} n^*(\varphi(x, \xi, \xi)) d\xi d\xi \right. \\ \left. - (-1)^{p-1} \int_0^\infty \frac{\sin R(x-\xi)}{\pi(x-\xi)} f(\xi) d\xi \right\} = 0$$

Beweis: Aus dem Beweis von Satz 6.3 folgt, daß nur der Hauptterm von $n^*(\varphi(x, \xi, \xi))$ bzgl. ξ einen Beitrag zu dem ersten Integral in (6.13) liefert, d.h. es gilt

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty \int_{\gamma_0^R} f(\xi) (n-p) \xi^{n-p-1} n^*(\varphi(x, \xi, \xi)) d\xi d\xi \\ = \lim_{R \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_0^x \int_{\gamma_0^R} f(\xi) (-1)^p \sum_{\nu=1}^{\infty} e^{\xi \omega_\nu(x-\xi)} \omega_\nu d\xi d\xi - \right.$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_0^R} \int_{\gamma_0^R} f(\xi) (-1)^p \sum_{\nu=0}^{n-p} e^{\xi \omega_\nu(x-\xi)} \omega_\nu d\xi d\xi \}$$

$$= \lim_{R \rightarrow \infty} (-1)^{p-1} \int_0^\infty \frac{\sin R(x-\xi)}{\pi(x-\xi)} f(\xi) d\xi.$$

Der letzte Schritt folgt aus [1], Korollar 4.1.

Damit ist gezeigt, daß unter den Voraussetzungen von Satz 6.3 die Darstellung einer Funktion $f(x)$ nach der obigen Klasse von Integraltransformationen äquivalent ist mit der Darstellbarkeit von $f(x)$ als Fourierintegral. Aufgrund der Ergebnisse von Benzinger [1] folgt auch die Äquivalenz der in [1] und hier betrachteten Klassen von Integraltransformationen.

Satz 6.5 $f(x)$ sei $\nu_0 = k_M + 1$ -mal stetig differenzierbar in $[0, \infty)$, ferner gelte $f^{(j)}(x) \in L(0, \infty)$ für $0 \leq j \leq \nu_0$ und $f^{(j)}(0) = 0$ für $0 \leq j \leq \nu_0 - 1$.

Dann gilt gleichmäßig in jedem Intervall $[\delta_1, A]$ mit $0 < \delta_1 < A$

$$(6.14) \quad f(x) = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{n-p}{2\pi i} (-1)^{p-1} \int_0^\infty \int_{\gamma_0^R} n^*(\varphi(x, \xi, \zeta)) f(\xi) \zeta^{n-p-1} d\xi d\xi.$$

Beweis: Die einzelnen Summanden im Integral

$$(6.15) \quad \int_0^\infty n^*(\varphi(x, \xi, \zeta)) f(\xi) d\xi,$$

die Ableitungen der Gestalt $\frac{\partial^1}{\partial \xi^1} \varphi(x, \xi, \zeta)$ enthalten, integrieren wir nun bis zu ν_0 -mal partiell.

Da wegen (5.8) und $n^*(h_\nu^*(\xi)) = 0$ für $1 \leq \nu \leq p$

$$(6.16) \quad n^*(\omega_\nu(\xi, \zeta)/\omega) = \frac{1}{\lambda} n^*(h_\nu^*(\xi)) [1] = 0 (1/\zeta^{n-p+1})$$

gilt, folgt aus (6.2) für den Hauptterm I des Integrals (6.15)

$$I = \int_0^x f(\xi) \frac{\partial^p}{\partial \xi^p} \left(\sum_{j=1}^{p+\infty} y_j(x, \xi) w_j(\xi, \xi) / w \right) d\xi \\ - \int_x^\infty f(\xi) \frac{\partial^p}{\partial \xi^p} \left(\sum_{j=p+\infty}^n y_j(x, \xi) w_j(\xi, \xi) / w \right) d\xi$$

Die Terme, die Ausdrücke der Gestalt (6.16) bzw. Summanden mit Ableitungen niedrigerer Ordnung als p enthalten, liefern zu (6.14) nur Beiträge, die für $R \rightarrow \infty$ gleichmäßig bzgl. x zu Null streben.

Wir integrieren nun I einmal partiell und erhalten, da die ausintegrierten Terme wegen der Voraussetzungen an $f(x)$ an den Grenzen 0 bzw. ∞ verschwinden,

$$I = f(\xi) \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \right)^{p-1} \left(\sum_{j=p+\infty}^n y_j(x, \xi) w_j(\xi, \xi) / w \right) \Big|_{\xi=x} + I_0$$

mit

$$I_0 = - \sum_{j=1}^{p+\infty} (y_j(x, \xi) w_j(\xi, \xi) / w) f'(\xi) d\xi \\ + \sum_{j=p+\infty}^n (y_j(x, \xi) w_j(\xi, \xi) / w) f'(\xi) d\xi$$

Wegen (5.8) und Satz 4.2 gilt

$$y_j(x, \xi) w_j(x, \xi) / w = \frac{(-1)^{p-1}}{\xi^{n-p}} [1],$$

daher folgt für I :

$$I = f(x) \frac{(-1)^{p-1}}{\xi^{n-p}} [1] + I_0.$$

Für den Hauptterm von (6.14) gilt somit

$$\begin{aligned} & \frac{n-p}{2\pi i} (-1)^{p-1} \int_{\gamma_0^R} (f(x) \frac{(-1)^{p-1}}{\zeta^{n-p}}) \zeta^{n-p-1} d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i} f(x) \int_{\gamma_0^R} \frac{n-p}{\zeta} d\zeta = f(x) \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=R} \frac{1}{\lambda} d\lambda = f(x) \end{aligned}$$

Alle übrigen Terme streben für $R \rightarrow \infty$ gleichmäßig zu Null (siehe z.B. [7b], Satz 5).

Wir wenden uns nun dem Fall $\alpha_0 = -\infty$ zu und beweisen den folgenden, zu Satz 6.1 analogen Satz:

Satz 6.6 $G_n(x, \xi, \zeta)$ sei die Greensche Funktion eines Randwertproblems der Gestalt (5.1), (5.16) mit $n-p=2k+2$. Falls die Randbedingungen (5.16) die Voraussetzung V_p erfüllen, gibt es für jedes genügend große R eine monotone Folge $\{a_v\}$ mit $a_v \in \mathbb{R}$ und $\lim_{v \rightarrow \infty} a_v = \alpha$, so daß für $-A \leq x \leq A$ und $-a_v \leq \xi \leq a_v$ gilt

$$\begin{aligned} (6.17) \quad & \lim_{v \rightarrow \infty} \int_{\gamma_{0v}^R} (n-p) \zeta^{n-p-1} n^*(G_{a_v}(x, \xi, \zeta) - \psi_0(x, \xi, \zeta)) d\zeta \\ &= \lim_{v \rightarrow \infty} \int_{\gamma_{0v}^R} (n-p) \zeta^{n-p-1} n^*(G_{a_v}(x, \xi, \zeta) - \psi_1(x, \xi, \zeta)) d\zeta \\ &= 0. \end{aligned}$$

Die Konvergenz ist gleichmäßig für $-A \leq x \leq A$, $-B \leq \xi \leq B$ und $\psi_0(x, \xi, \zeta)$ hat für $\zeta \in S_{00}$, $|\zeta| > |\zeta_0|$, die Gestalt

$$\psi_0(x, \xi, \zeta) = \psi_{0R}(x, \xi, \zeta) + \begin{cases} \sum_{j=p+1}^{p+k} y_j(x, \zeta) w_j(\xi, \zeta) / w & \text{für } x > \xi \\ -\left(\sum_{j=1}^{p-1} + \sum_{j=p+k+1}^n\right) y_j(x, \zeta) w_j(\xi, \zeta) / w & \text{für } x < \xi \end{cases}$$

Dabei sei $\{y_1(x, \xi), \dots, y_n(x, \xi)\}$ in S_{00} das in Satz 4.1 abgeschätzte Fundamentalsystem der Dgl. (4.1) und $w_v(x, \xi)$ sei die Adjunkte von $y_v^{(n-1)}(x)$ in der zu der Wronskideterminante w der Funktionen $y_1(x, \xi), \dots, y_n(x, \xi)$ gehörenden Matrix.

Falls mit $\tilde{v}_{jv}$ der Hauptterm von $\frac{v_{jv}}{\Delta_a(\xi)}$ bzgl. ξ bezeichnet wird, so ist

$$\psi_{OR}(x, \xi, \xi) = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p \sum_{v=1}^n y_j(x, \xi) U_{v, -a(y_i)} \frac{w_i(\xi, \xi)}{w} \tilde{v}_{jv}[1],$$

d.h. der Hauptterm von $\psi_{OR}(x, \xi, \xi)$ ist gleich dem Hauptterm von $R_{00}^{a(1)}(x, \xi, \xi) + R_{00}^{a(2)}(x, \xi, \xi)$ und für $\xi \in S_{00, \epsilon}$ gilt gleichmäßig bzgl. $-A \leq x \leq A, -B \leq \xi \leq B$ und $\xi, |\xi| > |\xi_0|$

$$\psi_{OR}(x, \xi, \xi) = \lim_{v \rightarrow \infty} \left(R_{00}^{a(1)}(x, \xi, \xi) + R_{00}^{a(2)}(x, \xi, \xi) \right) =$$

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \begin{vmatrix} y_1(x, \xi) \dots y_p(x, \xi) & 0 & \dots & 0 & 0 \\ U_1^{av}(y_1) \dots U_1^{av}(y_p) & U_1^{av}(y_{p+1}) \dots U_1^{av}(y_n) & \sum_{i=1}^p U_{1, -a(y_i)} \frac{w_i(\xi, \xi)}{w} & \dots & \frac{1}{\Delta_a(\xi)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ U_n^{av}(y_1) \dots U_n^{av}(y_p) & U_n^{av}(y_{p+1}) \dots U_n^{av}(y_n) & \sum_{i=1}^p U_{n, -a(y_i)} \frac{w_i(\xi, \xi)}{w} & \dots & \frac{1}{\Delta_a(\xi)} \end{vmatrix}$$

Analog zu $\psi_0(x, \xi, \xi)$ sei $\psi_1(x, \xi, \xi)$ für $\xi \in S_{01}, |\xi| > |\xi_0|$ definiert.

Beweis zu Satz 6.6 Analog zum Beweis von Satz 6.1 können wir für jedes genügend große R eine monotone Folge $\{a_v\}$ mit $\lim_{v \rightarrow \infty} a_v = \infty$ konstruieren, so daß für $\xi \in \gamma_0^R$ und $v \geq 1$ gilt:

$$(6.18) \quad \left| \theta_{-2} + \theta_0 e^{2\xi \omega_{\infty} a_v} + \theta_2 e^{4\xi \omega_{\infty} a_v} \right| \geq \delta > 0$$

Dabei seien Θ_{-2}, Θ_0 und Θ_2 die in V_2 definierten Zahlen.

Aus den Abschätzungen von Satz 5.2 folgt mit der zu (5.8) analogen Abschätzung für den Fall $I=(-\omega, \omega)$ und wegen $n^*(h_v^*(f))=0, 1 \leq v \leq p$, für $f \in S_{00}$ mit $|f| > |f_0|$

$$(6.19) \quad (n-p) \int_0^{n-p-1} n^*(G_{a_v}(x, f, f) - \psi_0(x, f, f)) \\ = m_1^{a_v}(x, f, f) e^{\int_0^{a_v} \omega(x+a_v)} / f^2 + m_2^{a_v}(x, f, f) e^{\int_0^{a_v} \omega(x-a_v)} / f^2 + \\ \{ m_3^{a_v}(x, f, f) e^{\int_0^{a_v} \omega(a_v-f)} + m_4^{a_v}(x, f, f) e^{-\int_0^{a_v} \omega(f+a_v)} \} f^{k_{M_1}}$$

Für $1 \leq j \leq 4$ und $v \geq 1$ sind die Funktionen $m_j^{a_v}(x, f, f)$ für $f \in S_{00}$, $|f| > |f_0|$, $-A \leq x \leq A$ und $-a_v \leq f \leq a_v$ wegen (6.19) und aufgrund der Abschätzungen von Satz 5.2 gleichmäßig beschränkt.

Wie beim Beweis von Satz 6.1 können wir nun zeigen, daß das Integral über die Terme in (6.19) für $-A \leq x \leq A$ und $-a_v \leq f \leq a_v$ für $x \rightarrow \infty$ zu Null strebt und zwar gleichmäßig, falls $-B \leq f \leq B$ verlangt wird.

Analog folgt die Behauptung für das Integral in (6.17) über $\gamma_{0,1}^R$.

Nun setzen wir

$$(6.20) \quad \psi(x, f, f) = \begin{cases} \psi_0(x, f, f) & \text{für } -A \leq x \leq A, -\omega < f < \omega, f \in S_{00}^R, |f| > |f_0| \\ \psi_1(x, f, f) & \text{für } -A \leq x \leq A, -\omega < f < \omega, f \in S_{01}^R, |f| > |f_0| \end{cases}$$

Damit können wir den folgenden, zu Satz 6.2 analogen Satz beweisen:

Satz 6.7 Sei $f(x) \in L(-\infty, \infty)$, dann gilt gleichmäßig für $-A \leq x \leq A$

$$(6.21) \quad \lim_{v \rightarrow \infty} \int_{-a_v}^{a_v} f(\xi) \int_{\gamma_0^R} (n-p) \xi^{n-p-1} n^*(G_{a_v}(x, \xi, \xi)) d\xi d\xi \\ = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \int_{\gamma_0^R} (n-p) \xi^{n-p-1} n^*(\psi(x, \xi, \xi)) d\xi d\xi.$$

Ferner gilt für $-A \leq x \leq A$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \int_{\gamma_0^R} (n-p) \xi^{n-p-1} n^*(\psi(x, \xi, \xi)) d\xi d\xi \\ = \int_{\gamma_0^R} \int_{-\infty}^{\infty} (n-p) \xi^{n-p-1} f(\xi) n^*(\psi(x, \xi, \xi)) d\xi d\xi.$$

Sei

$$(6.22) \quad m_1(y) = \lambda n(y); \tilde{U}_v^a(y) = 0, 1 \leq v \leq n$$

ein zweites Randwertproblem der Gestalt (5.1), (5.16), wobei die Koeffizientenfunktionen von $m_1(y)$ die Bedingungen (4.4), ..., (4.7) erfüllen und wobei die Randbedingungen $\tilde{U}_v^a(y)$ die Voraussetzung V_2 erfüllen.

Mit $\tilde{\psi}(x, \xi, \xi)$ bzw. $\tilde{k}_{M_1}$ bezeichnen wir die der durch (6.20)

definierten Funktion $\psi(x, \xi, \xi)$ bzw. der durch (5.19) definierten Zahl k_{M_1} entsprechende Funktion bzw. Zahl des Problems (6.22).

Mit diesen Bezeichnungen gilt der folgende Äquikonvergenzsatz:

Satz 6.8: Falls $f(x) \in L(-\infty, \infty)$ ist und falls $k_{M_1} = \tilde{k}_{M_1} = 0$ ist, gilt gleichmäßig für $-A \leq x \leq A$

$$(6.23) \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_0^R} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) n^*(\psi(x, \xi, \delta) - \tilde{\psi}(x, \xi, \delta)) d\xi d\delta = 0$$

Bemerkung: Aufgrund der Normierung der Randbedingungen kann der Fall $k_{M_1} = 0$ nur für $p \leq 2$ eintreten (siehe Satz 6.3).

Beweis zu Satz 6.8: Aus den Abschätzungen für die Funkti-

onen $y_j^{(k)}(x, \delta), w_j^{(k)}(\xi, \delta)$ und aus den Abschätzungen für die Terme $R_{ik}^{a(j)}(x, \xi, \delta)$ in Satz 5.2 folgt wegen $n^*(h_v^*(\xi)) = 0$, $1 \leq v \leq p$, für $\xi \in \gamma_{0j}^R$, $j = 0, 1$

$$\begin{aligned} & (n-p)\delta^{n-p-1} n^*(\psi_j(x, \xi, \delta) - \tilde{\psi}_j(x, \xi, \delta)) \\ &= (-1)^p \begin{cases} \sum_{v=1}^p e^{\delta \omega_v(x-\xi)} [\omega_v] \frac{1}{\delta} & \text{für } x > \xi \\ -\sum_{v=p+1}^{n-p} e^{\delta \omega_v(x-\xi)} [\omega_v] \frac{1}{\delta} & \text{für } x < \xi \end{cases} \\ &+ \begin{cases} -\sum_{v=1}^p x^{v-1} O(1/\delta^2) & \text{für } x > \xi \\ 0 & \text{für } x < \xi \end{cases} \end{aligned}$$

$$+ (n-p)\delta^{n-p-1} n^*(\psi_{jR}(x, \xi, \delta) - \tilde{\psi}_{jR}(x, \xi, \delta))$$

mit

$$(n-p)\delta^{n-p-1} n^*(\psi_{jR}(x, \xi, \delta) - \tilde{\psi}_{jR}(x, \xi, \delta)) = O\left(\sum_{v=1}^p x^{v-1} / \delta^2\right).$$

Analog zum Beweis von Satz 6.3 folgt, daß das Integral über die oben aufgeführten Terme für $R \rightarrow \infty$ und $-A \leq x \leq A$ gleichmäßig zu Null strebt.

Auch im Falle $I = (-\infty, \infty)$ können wir zeigen, daß die durch unser Ausschöpfungsverfahren definierte Klasse von Integraltransformationen äquivalent ist mit der Klasse der Fourierintegrale, es gilt:

Satz 6.9 Sei $f(x) \in L(-\infty, \infty)$, falls die in (5.19) definierte Zahl $k_{M_1} = 0$ ist, gilt gleichmäßig für $-A \leq x \leq A$

$$\frac{1}{2\pi i} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \int_{\gamma_0^R} (n-p) \xi^{n-p-1} n^*(\psi(x, \xi, \rho)) d\xi d\rho$$

$$- \lim_{R \rightarrow \infty} (-1)^{p-1} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \frac{\sin R(x-\xi)}{\pi(x-\xi)} d\xi = 0.$$

Dieser Satz läßt sich analog zu Satz 6.4 beweisen.

Satz 6.10 $f(x)$ sei $v_0 = (k_{M_1} + 1)$ -mal stetig differenzierbar

und es gelte $f^{(j)}(x) \in L(-\infty, \infty)$ für $0 \leq j \leq v_0$ und damit

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f^{(j)}(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f^{(j)}(x) = 0 \text{ für } 0 \leq j \leq v_0 - 1.$$

Dann gilt gleichmäßig für $-A \leq x \leq A$

$$f(x) = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{n-p}{2\pi i} (-1)^{p-1} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) n^*(\psi(x, \xi, \rho)) \xi^{n-p-1} d\xi d\rho.$$

Der Beweis dieses Satzes verläuft analog zum Beweis von Satz 6.4.

§7 Hilfssätze

Lemma 7.1 Sei

$$D = \begin{vmatrix} 1 & . & . & . & . & 1 \\ \omega_1 & . & . & . & . & \omega_{n-p} \\ \vdots & & & & & \vdots \\ \omega_1^{n-p-1} & . & . & . & . & \omega_{n-p}^{n-p-1} \end{vmatrix}$$

und $(-1)^{v+j+1} D_{vj}$ die Adjunkte in der zu D gehörenden Matrix, dann gilt

$$\frac{D_{vj}}{D_{v1}} = (-\omega_v)^{j-1} \quad \text{für } 1 \leq v \leq n-p \text{ und } 0 \leq j \leq n-p-1.$$

Beweis: Das Gleichungssystem

$$\sum_{v=1}^{n-p} \omega_v^{n-p-j} (-1)^{v+n-p+1-1} D_{v1} = \begin{cases} 0 & \text{für } j \neq 1 \text{ und } 1 \leq j \leq n-p \\ D & \text{für } j=1 \text{ und } 0 \leq j \leq n-p-1 \end{cases}$$

ist eindeutig lösbar und besitzt die Lösung

$$D_{vj} = \frac{D}{n-p} \omega_v^j (-1)^{v+n-p+1-j}.$$

Daraus folgt

$$\frac{D_{vj}}{D_{v1}} = \omega_v^{j-1} (-1)^{1-j} = (-\omega_v)^{j-1}.$$

Lemma 7.2 $m(y)$ und $n(y)$ seien durch (4.2) und (4.3) gegeben. Ferner gelte (4.4), ..., (4.7) für die Koeffizientenfunktionen von $m(y)$ und $n(y)$. Dann erfüllen die durch die Umformung von (4.1) in §4 definierten Funktionen $k_v(x)$ und $l_v(x)$ die folgenden Bedingungen:

$$(1) \quad x^{p-1} k_v^{(j)}(x) \in L(I) \quad 2 \leq v \leq n-p, 0 \leq j \leq p-v+1$$

$$(2) \quad x^{p-1+v-1} l_v(x) \in L(I) \quad 1 \leq v \leq p$$

$$(3) \quad x^{v-1} l_v^{(j)}(x) \rightarrow 0 \text{ für } x \rightarrow \infty \text{ und } 1 \leq v \leq p, 0 \leq j \leq n-p-1.$$

Dabei sei $I = (-\infty, \infty)$ oder $I = [0, \infty)$.

Beweis: Aus den Umformungen der Dgl. (4.1) in §4 folgt:

$k_v(x)$ besteht aus Summen von Produkten von Funktionen

$$f_\mu(x), g_j^{(k)}(x) \quad \text{mit } 2 \leq \mu \leq v, 2 \leq j+k \leq v.$$

Der Hauptterm von $k_v(x)$ ist eine Linearkombination der Funktionen $f_v(x)$ und $g_j^{(k)}(x)$ mit $j+k=v$, daher folgt (1) aus den beiden ersten Zeilen von (4.6).

$l_v(x)$ besteht aus Summen von Produkten von Funktionen

$$f_\mu(x), g_j^{(k)}(x) \quad \text{mit } 2 \leq \mu \leq n-p+v, 2 \leq j+k \leq n-p+v.$$

Der Hauptterm von $l_v(x)$ ist eine Linearkombination der Funktionen $f_{v+n-p}(x)$ und $g_j^{(k)}(x)$ mit $j+k=v+n-p$, daher folgt (2) aus den beiden letzten Zeilen von (4.6) und (3) aus (4.7).

Lemma 7.3 Seien $m^*(y)$ und $n^*(y)$ die zu $m(y)$ und $n(y)$ adjungierten Differentialausdrücke, d.h.

$$m^*(y) = (-1)^{n_y} y^{(n)} + \sum_{v=2}^n (f_v(x)y)^{(n-v)} (-1)^{n-v}$$

und

$$n^*(y) = (-1)^{p_y} y^{(p)} + \sum_{v=2}^p (g_v(x)y)^{(p-v)} (-1)^{p-v}.$$

Unter den Voraussetzungen (4.4), ..., (4.7) an die Koeffizientenfunktionen von $m(y)$ und $n(y)$ erfüllen die bei der Umformung der zu (4.1) adjungierten Gleichung $m^*(y) = \lambda n^*(y)$ in eine zu (4.19) analoge Integrodifferentialgleichung definierten, zu $k_v(x)$ und $l_v(x)$ analogen Funktionen $\tilde{k}_v(x)$ ($2 \leq v \leq n-p$) und $\tilde{l}_\mu(x)$ ($1 \leq \mu \leq p$) die folgenden Bedingungen:

$$(4) \quad x^{p-1} \tilde{k}_v^{(j)}(x) \in L(I) \quad 2 \leq v \leq n-p, 0 \leq j \leq p-v+1$$

$$(5) \quad x^{p-1+v-1} \tilde{l}_v(x) \in L(I) \quad 1 \leq v \leq p$$

$$(6) \quad x^{v-1} \tilde{l}_v^{(j)}(x) \rightarrow 0 \text{ für } x \rightarrow \infty \text{ und } 1 \leq v \leq p, 0 \leq j \leq n-p-1.$$

Dabei ist $I = (-\infty, \infty)$ oder $I = [0, \infty)$.

Beweis: Wegen

$$m^*(y) = (-1)^{n_y} y^{(n)} + \sum_{\mu=0}^{n-2} y^{(\mu)} \sum_{v=2}^{n-\mu} \binom{n-v}{\mu} (-1)^{n-v} f_v^{(n-v-\mu)}(x)$$

und

$$n^*(y) = (-1)^{p_y} y^{(p)} + \sum_{\mu=0}^{p-2} y^{(\mu)} \sum_{v=2}^{p-\mu} \binom{p-v}{\mu} (-1)^{p-v} g_v^{(p-v-\mu)}(x)$$

folgen (4), (5) und (6) analog zu Lemma 7.2 aus (4.4), ..., (4.7).

Lemma 7.4 Sei $\{y_1(x, \xi), \dots, y_n(x, \xi)\}$ ein Fundamentalsystem der Dgl. (4.1), welches die Abschätzungen von Satz 4.2 erfüllt $w_v(x, \xi)$ die Adjunkte von $y_v^{(n-1)}(x, \xi)$ in der zu der Wronskideterminante w dieser Funktionen gehörenden Matrix. Dann gilt gleichmäßig bzgl. $\xi \in S_{0k}, |\xi| > |\xi_0|$ und $x \in [0, \infty)$ die Abschätzung

$$(7) \quad \left(\frac{d}{dx}\right)^1 \frac{w_v(x, \xi)}{w} = \begin{cases} \frac{\omega_{v-p}^{1+1-p}}{\xi^{n-1-1}} e^{-\xi \omega_{v-p}} \frac{(-1)^1}{n-p} [1] & p+1 \leq v \leq n \\ \frac{1}{\lambda} \left(\frac{d}{dx}\right)^1 h_v^*(x) [1] & 1 \leq v \leq p \end{cases}$$

$$0 \leq 1 \leq n-1.$$

Dabei stellt $\{h_1^*(x), \dots, h_p^*(x)\}$ ein Fundamentalsystem der zu $n(y)=0$ adjungierten Gleichung $n^*(y)=0$ dar.

Beweis: Für $p+1 \leq v \leq n-1$ folgt die Behauptung aus den gleichen Überlegungen, die zu den Abschätzungen (4.53) und (4.57) führten.

Für $1 \leq v \leq p$ gilt aufgrund der Abschätzungen von Satz 4.2

$$w = \begin{vmatrix} y_1 & \dots & y_n \\ y_1' & \dots & y_n' \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} h_1 & \dots & h_p \\ h_1' & \dots & h_p' \\ \vdots & & \vdots \\ h_1^{(p-1)} & \dots & h_p^{(p-1)} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} y_{p+1}^{(p)} & \dots & y_n^{(p)} \\ y_{p+1}^{(p+1)} & \dots & y_n^{(p+1)} \\ \vdots & & \vdots \\ y_{p+1}^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} [1]$$

$$:= UV [1].$$

$$w_v = \begin{vmatrix} h_1 & \dots & h_{v-1} & h_{v+1} & \dots & h_p \\ h_1' & \dots & h_{v-1}' & h_{v+1}' & \dots & h_p' \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ h_1^{(p-2)} & \dots & h_{v-1}^{(p-2)} & h_{v+1}^{(p-2)} & \dots & h_p^{(p-2)} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} y_{p+1}^{(p-1)} & \dots & y_n^{(p-1)} \\ y_{p+1}^{(p)} & \dots & y_n^{(p)} \\ \vdots & & \vdots \\ y_{p+1}^{(n-2)} & \dots & y_n^{(n-2)} \end{vmatrix} [1]$$

d.h. es gilt $w_v(x, \xi) = U_v S [1]$.

Aus diesen Überlegungen folgt

$$w_v/w = (U_v/U) \cdot (S/V) [1].$$

Der Quotient U_v/U ist aber gleich der in §4 definierten Funktion $p_v(x)$, da ferner

$$S/V = 1/\lambda \{1 + O(1/\xi)\}$$

ist, gilt

$$w_v/w = h_v^*(x)/\lambda \{1 + O(1/\xi)\}$$

mit $h_v^*(x) = p_v(x)$.

Daher bilden die Funktionen $\{h_1^*(x), \dots, h_p^*(x)\}$ ein Fundamentalsystem von Lösungen der Dgl. $n^*(y) = 0$.

Den Beweis von (7) für $1 \leq v \leq p$ und $1 \leq j \leq n-1$ erhalten wir durch die folgenden Überlegungen:

Da die Funktionen $w_v(x, \xi)/w$ Lösungen der Dgl. $m^*(y) = \lambda n^*(y)$ sind (siehe Beweis zu Satz 4.1) und da sich analog zu Satz 4.2 die Existenz eines Fundamentalsystems $\{\tilde{y}_1(x, \xi), \dots, \tilde{y}_n(x, \xi)\}$ dieser Dgl. nachweisen läßt, welches samt seiner Ableitungen die Abschätzungen (7) erfüllt, so gilt

$$w_v(x, \xi)/w = \sum_{\mu=1}^n c_{v\mu}(\xi) \tilde{y}_\mu(x, \xi).$$

Wir werden nun zeigen, daß für $1 \leq v \leq p$ und $p+1 \leq \mu \leq n$ $c_{v\mu}(\xi) = 0$ ist.

Es gilt für $\xi \in S_{0k}$

$$\Re(-\xi \omega_1) \geq \Re(-\xi \omega_2) \geq \dots \geq \Re(-\xi \omega_k) \geq 0$$

und

$$\Re(-\xi \omega_{n-p}) \leq \Re(-\xi \omega_{n-p-1}) \leq \dots \leq \Re(-\xi \omega_{k+1}) \leq 0.$$

Wäre nun $c_{v\mu} \neq 0$, so müßte sich $w_v(x, \xi)/w$ für ein festes

$g \in S_{0k, \varepsilon}$ mit $|g| > |g_0|$ für $x \rightarrow \infty$ wie $c_{v, p+1}(\varrho) e^{-\varrho \omega_1 x}$ verhalten, das ist aber ein Widerspruch zu den Abschätzungen (4.20), (4.21) für die Funktionen $p_v(x)$. Daher folgt $c_{v, p+1}(\varrho) = 0$, analog folgt $c_{v, p+2}(\varrho) = \dots = c_{v, p+\kappa}(\varrho) = 0$, $1 \leq v \leq p$.

Nun betrachten wir für ein $g \in S_{0k, \varepsilon}$ mit $|g| > |g_0|$ das Verhalten von $e^{-\varrho \omega_{n-p} x} w_v(x, \varrho) / w$ für $x \rightarrow \infty$. Wegen

$w_v(x, \varrho) / w = h_v^*(x) / \lambda \{1 + O(1/\varrho)\}$ und (4.20), (4.21) strebt dieses Produkt zu Null für $x \rightarrow \infty$, dies ist aber ein Widerspruch zu $c_{v, n}(\varrho) \neq 0$. Daher gilt $c_{v, n}(\varrho) = 0$, analog folgt

$c_{v, p+\kappa+1}(\varrho) = \dots = c_{v, n-1}(\varrho) = 0$, d.h. es gilt für $1 \leq v \leq p$

$$w_v(x, \varrho) / w = \sum_{\mu=1}^p c_{v, \mu}(\varrho) \tilde{y}_{\mu}(x, \varrho).$$

Daraus folgt mit (4.20) und (4.21) die Behauptung.

Die zu (7) analogen Ergebnisse erhalten wir auch im Fall $I = (-\infty, \infty)$.

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] BENZINGER, H.E., Equiconvergence for singular differential operators, J.Math.Anal.Appl. 32, 338-351 (1970).
- [2] BIRKHOFF, G.D., a) On the asymptotic character of the solutions of certain linear differential equations containing a parameter, Trans.Amer.Math.Soc. 9, 219-231 (1908).
b) Boundary value and expansion problems of ordinary linear differential equations, Trans.Amer. Math.Soc. 9, 373-395 (1908).
- [3] BLISS, G.A., Definitely self-adjoint boundary value problems, Trans.Amer.Math.Soc. 44, 413-428 (1938).
- [4] BRAUER, F., a) Spectral theory for the differential equation $Ly = \lambda Ny$, Can.J.Math. 10, 431-446 (1958).
b) Spectral theory for linear systems of differential equations, Pac.J.Math. 10, 17-34 (1960).
- [5] COLLATZ, L., Eigenwertprobleme mit technischen Anwendungen, Leipzig, Akad.Verl. 1949.
- [6] Eberhard, W., a) Das asymptotische Verhalten der Greenschen Funktion irregulärer Eigenwertprobleme mit zerfallenden Randbedingungen, Math.Z. 86, 45-53 (1964).
b) Die Entwicklungen nach Eigenfunktionen irregulärer Eigenwertprobleme mit zerfallenden Randbedingungen, Math.Z. 86, 205-214 (1964).
c) Über das asymptotische Verhalten von Lösungen der linearen Differentialgleichung $M(y) = \lambda N(y)$ für große Werte von $|\lambda|$, Math.Z. 119, 160-170 (1970).
d) Über Eigenwerte und Eigenfunktionen einer Klasse von nichtselbstadjungierten Randwertproblemen, Math.Z. 119, 171-178 (1970).

- [7] EBERHARD, W., FREILING, G., a) Nicht-S-hermitesche Rand- und Eigenwertprobleme, Math. Z. 133, 187-202 (1973).
b) Das Verhalten der Greenschen Matrix und der Entwicklungen nach Eigenfunktionen N-regulärer Eigenwertprobleme, Math. Z. 136, 13-30 (1974).
- [8] FUNTAKOV, V., a) On the expansions in eigenfunctions of a non-selfadjoint differential operator of arbitrary even order on the $[0, \infty)$ half-axis, Dokl. Ak. Nauk SSSR 132, 777-780 (1960)
transl. as Sov. Math. Dokl. 1, 659-662 (1960).
b) Expansion in eigenfunctions of a non selfadjoint differential operator of arbitrary even order on the semi-axis $[0, \infty)$, Izv. Akad. Nauk Az. SSSR, Seriya Fiz. Mat. i Tekh. Nauk No. 6, 3-19 (1960).
- [9] HÖLDER, E., Einordnung besonderer Eigenwertprobleme in die Eigenwerttheorie kanonischer Differentialgleichungssysteme, Math. Ann. 119, 21-66 (1943).
- [10] HUIGE, G. E., The spectral theorie of some non-selfadjoint operators, Comm. Pure a. Appl. Math. 21, 25-49 (1968).
- [11] KAMKE, E., Über die definiten selbstadjungierten Eigenwertaufgaben bei gewöhnlichen Differentialgleichungen I, Math. Z. 45, 759-785 (1939); II, Math. Z. 46, 231-250 (1940), III Math. Z. 46, 251-286 (1940).
- [12] KEMP, R. R. D., a) A singular boundary value problem for a non-self-adjoint differential operator, Can. J. Math. 10, 447-462 (1958).
b) On a class of non-self-adjoint differential operators, Can. J. Math. 12, 641-659 (1960).
- [13] KODAIRA, K., On ordinary differential equations of any even order and the corresponding eigen-

function expansions, Am. J. Math. 72, 502-544 (1950).

- [14] LEHMANN, N. J., Eine Integraldarstellung für selbst-adjungierte Randwertaufgaben (einschließlich einer Theorie der natürlichen Eigenwertprobleme), Math. Nachr. 14, 129-156 (1955).
- [15] LJANCE, V. E., A differential operator with spectral singularities I, Math. Sb. 64(106), 521-561 (1964), II, Math. Sb. 65(107), 47-103 (1964), Transl.: A. M. S., Series II 60, 185-283 (1967).
- [16] NEUMARK, M. A., a) Lineare Differentialoperatoren, Berlin, Akad. Verl. 1967.
b) Investigation of the spectrum and the expansion in eigenfunctions of a non-selfadjoint differential operator of the second order on a semi-axis, Tr. Mosc. Mat. Obsc. 3, 181-270 (1954), Transl.: A. M. S., Series II 16, 103-193 (1960).
- [17] NIESSEN, H.-D., Singuläre S-hermitesche Rand-Eigenwertprobleme, Manusc. Math. 3, 35-68 (1970).
- [18] NIESSEN, H.-D., SCHNEIDER, A., Integraltransformationen zu singulären S-hermiteschen Rand-Eigenwertproblemen, Manusc. Math. 5, 133-145 (1971).
- [19] REID, W. T., A new class of selfadjoint boundary value problems, Trans. Am. Math. Soc. 52, 381-425 (1942).
- [20] SCHÄPKE, F. W., SCHNEIDER, A., S-hermitesche Rand- und Eigenwertprobleme I, Math. Ann. 162, 9-26 (1965/66), II, Math. Ann. 165, 236-260 (1966), III, Math. Ann. 177, 67-94 (1968).
- [21] SCHNEIDER, A., a) Untersuchungen über singuläre reelle S-hermitesche Differentialgleichungssysteme im

Normalfall, Math. Z. 107, 271-296 (1968).

b) Weitere Untersuchungen über singuläre reelle S-hermitesche Differentialgleichungssysteme im Normalfall, Math. Z. 109, 153-168 (1969).

c) Zum Entwicklungssatz bei reellen singulären Differentialgleichungssystemen, Arch. d. Math. 21, 192-197 (1970).

- [22] STIEFEL, E., ZIEGLER, H., Natürliche Eigenwertprobleme, Z. ang. Math. Phys. Vol. I, 111-138 (1950).
- [23] STONE, M. H., a) A comparison of the series of Fourier and Birkhoff, Trans. Am. Math. Soc. 28, 695-761 (1926).
b) Certain integrals analogous to Fourier integrals, Math. Z. 28, 654-676 (1928).
- [25] TITCHMARSH, E. C., Eigenfunction expansions associated with second order differential equations, Oxford 1946.
- [24] TAMARKIN, J. D., Some general problems of the theory of ordinary linear differential equations and expansions of an arbitrary function in series of fundamental functions, Math. Z. 27, 1-54 (1927).
- [26] WEYL, H., Über gewöhnliche Differentialgleichungen und die zugehörigen Entwicklungen willkürlicher Funktionen, Math. Ann. 68, 220-269 (1910).
- [27] ZIMMERBERG, H. J., Two-point boundary problems involving a parameter linearly, Illin. J. Math. 4, 596-608 (1960).

Lebenslauf

Am 8.4.1949 wurde ich, Gerhard Freiling, als Sohn des Landwirts Heinrich Freiling und dessen Ehefrau Helene, geb. Mengel, in Marburg/Lahn geboren.

Von Ostern 1955 bis Ostern 1959 besuchte ich die Volksschule in Wollmar im Landkreis Marburg. Anschließend wechselte ich auf das Gymnasium Edertalschule in Frankenberg/Eder über, wo ich am 20. Juni 1967 die Reifeprüfung ablegte.

Im Wintersemester 1967/68 nahm ich an der Philipps-Universität in Marburg das Studium der Mathematik auf. Im Oktober 1970 bestand ich die mündliche Diplomprüfung in Mathematik und im April 1971 beendete ich meine Diplomarbeit "Über Summierbarkeit und Konvergenz von Birkhoffreihen".

Seit dem 1. Oktober 1974 bin ich wissenschaftlicher Angestellter im Fachbereich Mathematik der Philipps-Universität Marburg.

